PROF. DR. BERND SIMEON
CHRISTIAN GOBERT
THOMAS MÄRZ

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Numerik

SS 2009

Probeklausur

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Aufgabe 1: (ca. 12 Punkte)

Für $f \in C^\infty[0,h]$ wird das Integral $I(f) = \int_0^h f(x)\,dx$ durch die Quadraturformel

$$J(f) = hf(h/2)$$

approximiert.

a) Bestimmen Sie die Ordnung p von J. (Begründen Sie, warum die Ordnung nicht größer als Ihr angegebenes p sein kann.)

b) Der Approximationsfehler $E_J(h) = I(f) - J(f)$ hat die Form

$$E_J(h) = cf^{(p)}(\xi)h^{p+1}$$

mit $\xi \in (0,h)$. Begründen Sie diese Form und bestimmen Sie c.
Hinweis: Taylorentwicklung von f an geeignetem Punkt!

c) Geben Sie zur Approximation von $\hat{I}(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$ diejenige summatorische Quadraturformel S an, welche J als Basisverfahren benutzt. Leiten Sie die dazugehörige Abschätzung des Approximationsfehler

$$E_S(h) := |\hat{I}(f) - S(f)| \leq ?$$

her.

Aufgabe 2: (ca. 16 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische positiv definite Matrix mit den Eigenwerten

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$$

und den zugehörigen (normierten) Eigenvektoren $q_1, q_2, \ldots, q_n$.
Wir betrachten folgenden Algorithmus (simultane Iteration):

Eingabe: A, Q_0
Iteriere: $k = 1, 2, \ldots$
  $W_k = AQ_{k-1}$
  zerlege: $W_k = Q_k R_k$

Dabei sind die Q_k $(k = 0, 1, \ldots)$ $n \times 2$ Matrizen mit orthonormalen Spalten und $W_k = Q_k R_k$ die reduzierte QR-Zerlegung von W_k. Die Matrizen R_k sind also 2×2-Matrizen.

Bitte wenden →

a) Welchen Algorithmus durchläuft die 1. Spalte $Q_k(:,1)$ effektiv ? Begründen Sie, unter welchen Voraussetzungen an $Q_0(:,1)$ die 1. Spalte $Q_k(:,1)$ gegen einen normierten Eigenvektor q_1 zum Eigenwert λ_1 von A konvergiert.

Im Folgenden darf angenommen werden, dass bereits $Q_0(:,1) = q_1$ gilt.

b) Angenommen, die 2. Spalte $Q_k(:,2)$ konvergiert gegen einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$. Wieso muss x senkrecht auf q_1 stehen?

c) Begründen Sie, unter welchen Voraussetzungen an $Q_0(:,2)$ die 2. Spalte $Q_k(:,2)$ gegen den normierten Eigenvektor q_2 zum Eigenwert λ_2 von A konvergiert.

Aufgabe 3: (12 Punkte)

Bepunktung dieser Aufgabe:
Für jede der folgenden Multiple-Choice Fragen wird die richtige Lösung mit +2 Punkten bewertet, die falsche Lösung mit −2 Punkten und keine Antwort mit 0 Punkten. Die vergebenen positiven oder negativen Punkte werden zu einer Gesamtpunktzahl der Aufgabe summiert. Falls die Summe negativ ist wird die Aufgabe mit 0 Punkten bewertet. Die Gesamtpunktzahl der Aufgabe kann also nicht negativ werden.

Beantworten Sie die folgenden Fragen:

Eine Newton-Cotes-Formel mit n Stützstellen hat höchstens Ordnung n.	◯ Ja ◯ Nein
Jede konsistente Quadraturformel integriert lineare Funktionen exakt.	◯ Ja ◯ Nein
Adaptive Quadraturformeln liefern immer ein Ergebnis, dessen Fehler kleiner als die vorgegebene Toleranz ist.	◯ Ja ◯ Nein
Alle Eigenwerte einer Matrix A liegen in der Vereinigung der Gerschgorinkreise von A.	◯ Ja ◯ Nein
Bei exakter Arithmetik konvergiert die Vektoriteration für alle Startwerte gegen den Eigenvektor zum betragsgrößten Eigenwert.	◯ Ja ◯ Nein
Sei $H \in \mathbb{C}^{m\times m}$ obere Hessenberg-Matrix mit QR-Zerlegung $H = QR$. Dann ist RQ ebenfalls eine obere Hessenberg-Matrix.	◯ Ja ◯ Nein

Das Numerik-Team wünscht Ihnen viel Erfolg!

Diese Probeklausur ist für eine Bearbeitungszeit von 60 Minuten ausgelegt. Für die Klausur zu Semesterende wird die Bearbeitungszeit 90 Minuten betragen. Der Umfang der Klausur wird deshalb entsprechend größer sein.