Übungsblatt 1 – Musterlösung

Aufgabe 1 (Interpolationspolynom)

a) Bestimmen Sie die Hilfspolynome $L_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, für $x_0 = -1$, $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$ nach der Formel aus der Vorlesung.

b) Bestimmen Sie das resultierende Lagrange-Interpolationspolynom für folgende Funktionswerte an den Stützstellen: $f(x_0) = 2$, $f(x_1) = -1$ und $f(x_2) = 5$.

c) Leiten Sie analog zu der Vorlesung eine obere Schranke für den Interpolationsfehler auf $[0, h]$ her für $n = 2$ und den Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = h/2$, $x_2 = h$.

Lösung 1 (Interpolationspolynom)

a) Für das i-te Lagrange-Interpolationspolynom gilt

$$L_i(x) := \prod_{k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \qquad i = 0, \dots, n.$$

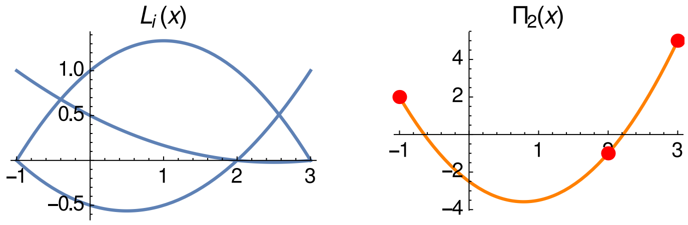
Damit folgt

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x-2}{-1-2} \cdot \frac{x-3}{-1-3} = \frac{x^2 - 5x + 6}{12} = \frac{1}{12}x^2 - \frac{5}{12}x + \frac{1}{2}, \\
L_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x+1}{2+1} \cdot \frac{x-3}{2-3} = \frac{x^2 - 2x - 3}{-3} = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1, \\
L_2(x) &= \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x+1}{3+1} \cdot \frac{x-2}{3-2} = \frac{x^2 - x - 2}{4} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

b) Für das Lagrange-Interpolationspolynom folgt dann

$$\begin{aligned}
\Pi_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) \\
&= 2\left(\frac{1}{12}x^2 - \frac{5}{12}x + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1\right) + 5\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{5}{4}\right)x^2 + \left(-\frac{5}{6} - \frac{2}{3} - \frac{5}{4}\right)x + \left(1 - 1 - \frac{5}{2}\right) \\
&= \frac{7}{4}x^2 - \frac{11}{4}x - \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

Die graphische Darstellung:



c) Laut Lemma 1.2 aus der Vorlesung gilt: $\exists \xi \in [a, b]$:

$$f(x) - \Pi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Damit folgt für $n = 2$

$$\|f - \Pi_2\|_{L^\infty([0,h])} \leq \frac{1}{6} \|f^{(3)}\|_{L^\infty([0,h])} \|x(x - h/2)(x - h)\|_{L^\infty([0,h])} \leq \frac{1}{12} \|f^{(3)}\|_{L^\infty([0,h])} h^3$$

Aufgabe 2 (Approximation von f')

Sei $\Pi(x)$ das quadratiche Polynom, das die glatte Funktion f an den Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = h$, $x_2 = 2h$ mit $h > 0$ interpoliert. Eine Funktion f heißt glatt, wenn Sie genügend oft stetig differenzierbar ist.

a) Bestimmen Sie die Parameter a, b und c, so dass

$$\Pi'(0) = \frac{af(0) + bf(h) + cf(2h)}{2h}$$

gilt.

b) Zeigen Sie, dass für den Fehler $f'(0) - \Pi'(0)$ die Entwicklung

$$f'(0) - \Pi'(0) = Cf^{(3)}(0)h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

gilt. Bestimmen Sie insbesondere die Konstante C. $f^{(3)}(0)$ bezeichne die dritte Ableitung von f an der Stelle 0.

Lösung 2 (Approximation von f')

a) Für das Interpolationspolynom $\Pi(x)$ gilt

$$\Pi(x) = \sum_{i=0}^{2} f(ih) L_i(x)$$

mit den Lagrange-Polynomen

$$L_0(x) = \frac{(x-h)(x-2h)}{(-h)(-2h)} = \frac{x^2 - 3hx + 2h^2}{2h^2},$$

$$L_1(x) = \frac{x(x-2h)}{h(-h)} = \frac{2hx - x^2}{h^2}, \qquad L_2(x) = \frac{x(x-h)}{2h^2} = \frac{x^2 - hx}{2h^2}.$$

Daraus folgt dann

$$\Pi'(x) = \frac{f(0)}{2h^2}(2x - 3h) + \frac{f(h)}{h^2}(2h - 2x) + \frac{f(2h)}{2h^2}(2x - h).$$

Für $x = 0$ gilt dann

$$\Pi'(0) = \frac{-3f(0) + 4f(h) - f(2h)}{2h}.$$

Also lauten die Konstanten $a = -3$, $b = 4$ und $c = -1$.

b) Wir entwickeln $f(h)$ und $f(2h)$ um $x_0 = 0$ und erhalten

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f^{(2)}(0)}{2}h^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}h^3 + \mathcal{O}(h^4),$$
$$f(2h) = f(0) + f'(0)2h + \frac{f^{(2)}(0)}{2}4h^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}8h^3 + \mathcal{O}(h^4).$$

Für $\Pi'(0)$ folgt somit

$$\begin{aligned}
2h\Pi'(0) =& -3f(0) + 4f(h) - f(2h)\\
=& -3f(0) + 4f(0) - f(0) + 4hf'(0) - 2hf'(0)\\
&+ 2h^2 f^{(2)}(0) - 2h^2 f^{(2)}(0) + \frac{2}{3}f^{(3)}(0)h^3 - \frac{4}{3}f^{(3)}(0)h^3 + \mathcal{O}(h^4)\\
=& 2hf'(0) - \frac{2}{3}f^{(3)}(0)h^3 + \mathcal{O}(h^4).
\end{aligned}$$

Somit folgt für den Fehler $f'(0) - \Pi'(0) = \frac{1}{3}f^{(3)}(0)h^2 + \mathcal{O}(h^3)$, und die gesuchte Konstante lautet $C = 1/3$.

Aufgabe 3 (Baryzentrische Lagrange Interpolation)

In dieser Aufgabe soll die Auswertung des Interpolationspolynoms mit Hilfe der Schemata

1) Aitken-Neville,
2) Horner-Schema mit Hilfe der Newtonschen Dividierten Differenzen,
3) Baryzentrische Darstellung

hinsichtlich Aufwand und numerischer Stabilität verglichen werden. Berechnen Sie dazu das Interpolationspolynom $\Pi_n(x)$ für die Funktion $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$ auf dem Intervall $I = [-1, 1]$ bezüglich den Tschebyscheffknoten mit allen drei Methoden für $n = 40$ und $n = 100$. Stellen Sie die Funktion $f(x)$ und das Polynom $\Pi_n(x)$ grafisch dar. Messen Sie jeweils die benötigte Zeit mit Hilfe der Befehle `tic` und `toc`.
Verwenden Sie für die Auswertung der baryzentrischen Darstellung den Algorithmus

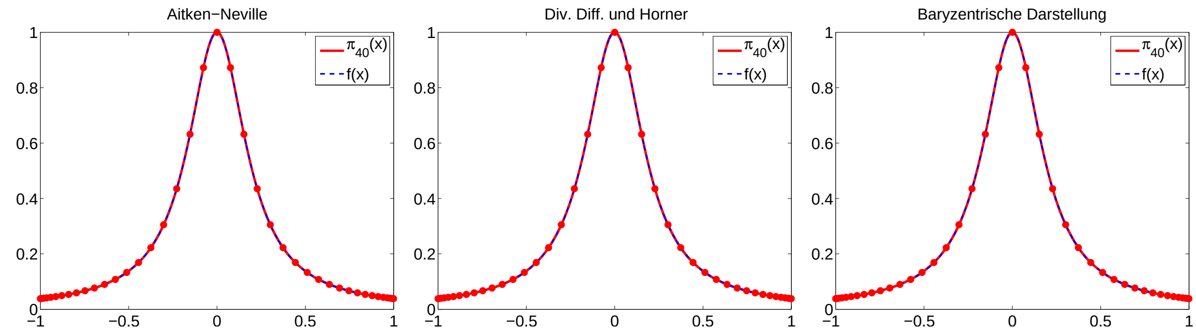
```
numer = zeros(size(x));
denom = zeros(size(x));
exact = zeros(size(x));
for j=1:n+1
  xdiff = x - xi(j);
  temp = wj(j)./xdiff;
```

```
    numer = numer + temp*fi(j);
    denom = denom + temp;
    exact(xdiff==0) = j;
  end
  Pix = numer./denom;
  ind = find(exact);
  Pix(ind) = fi(exact(ind));
```

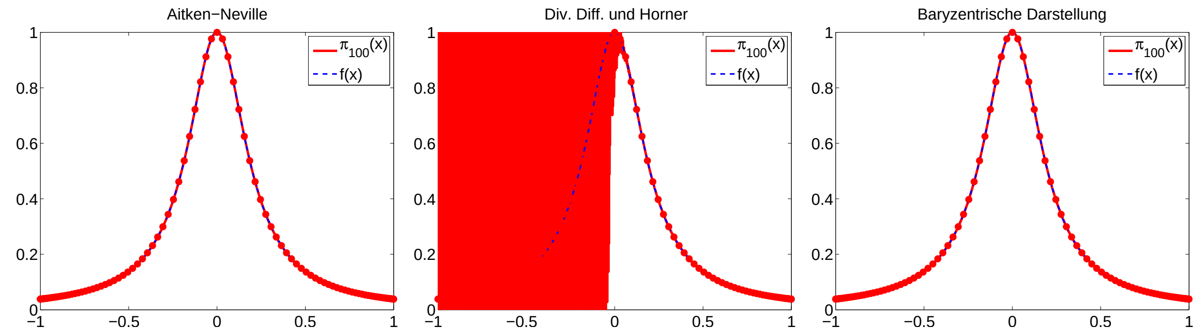
Hierbei bezeichnet `xi` den Vektor der Stützstellen und `fi` den Vektor der Funktionswerte an den Stützstellen. `x` bezeichnet den Vektor der Auswertungsstellen des Interpolationspolynoms `Pix`. Der Vektor `wj` enthält die baryzentrischen Gewichte (siehe Folien auf der Homepage).
Was beobachten Sie hinsichtlich Aufwand und Stabilität? Geben Sie die Ordnung des Aufwandes in Abhängigkeit von n und m (Anzahl der Auswertungspunkte des Interpolationspolynoms) von allen drei Methoden an.

Lösung 3 (Baryzentrische Lagrange Interpolation)

Für $n = 40$ erhalten wir die gafischen Darstellungen



und für $n = 100$ erhalten wir



Die Zeitmessung ergibt

	Aitken-Neville	Horner mit Div. Diff.	Baryzentrisch
$n = 40$	4.04	0.010136	0.010994
$n = 100$	11.36	0.011351	0.014598
Aufwand	$\mathcal{O}(mn^2)$	$\mathcal{O}(mn + n^2)$	$\mathcal{O}(mn + n^2)$

Der Aufwand ist in der letzten Zeile dargestellt.

Aufgaben zum Selbststudium

Aufgabe 4 (**Interpolation**)

Zeigen Sie, dass sich für beliebige Stützstellen $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ die Daten

$$f^{(j)}(x_i), \qquad 0 \leq j < m_i$$

eindeutig durch ein Polynom Π vom Grad $\leq \tilde{n} = m_0 + m_1 \cdots + m_n - 1$ interpolieren lassen. Beweisen Sie dazu zunächst mit dem Satz von Rolle, dass ein Polynom vom Grad $\leq \tilde{n}$, das an den Stützstellen x_i eine m_i-fache Nullstellen hat, identisch verschwindet.

Hinweis: $f^{(j)}$ bezeichnet die j-te Ableitung von f.

Lösung 4 (**Interpolation**)

Zunächst betrachten wir ein Polynom $P(x)$ vom Grad $\leq \tilde{n} = \sum_{i=0}^{n} m_i - 1$, welches an den Stützstellen x_i, $i = 0, \ldots, n$ eine m_i-fache Nullstelle hat, also $f^{(j)}(x_i) = 0$ für $0 \leq j < m_i$ für $i = 0, \ldots, n$. Das Polynom $P(x)$ lässt sich darstellen als

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\tilde{n}} \alpha_k x^k.$$

Umschreiben von $\tilde{n}$ liefert

$$\tilde{n} = n + \sum_{i=0}^{n} (m_i - 1). \tag{1}$$

Nehmen wir an, dass der führende Koeffizient von $P(x)$ nicht verschwindet, es gilt also $\alpha_{\tilde{n}} \neq 0$. Das Polynom $P(x)$ besitzt insgesamt $n+1$ Nullstellen. Folglich besitzt $P'(x)$ nach dem Satz von Rolle mindestens n Nullstellen, welche nicht mit den Nullstellen x_i von $P(x)$ zusammenfallen. Weiter gilt $P'(x_i) = 0$ für $m_i \geq 2$. Somit besitzt $P'(x)$ mindestens $\tilde{n}$ Nullstellen, wie man aus (1) erkennen kann. Weiter ist $P'(x)$ ein Polynom vom Grad $\leq \tilde{n} - 1$. Sukzessive erhalten wir somit für die k-te Ableitung von $P(x)$

- $P^{(k)}(x)$ ist ein Polynom vom Grad $\leq \tilde{n} - k$,
- $P^{(k)}(x)$ besitzt mindestens $\tilde{n} - k + 1$ Nullstellen.

Wählen wir insbesondere $k = \tilde{n}$, so gilt $P^{(\tilde{n})}(x) = (\tilde{n}!)\alpha_{\tilde{n}}$ und $P^{(\tilde{n})}(x)$ besitzt mindestens eine Nullstelle. Folglich muss $P^{(\tilde{n})}(x) = 0$ gelten und wir haben $\alpha_{\tilde{n}} = 0$, was einen Widerspruch zu unserer Annahme darstellt. Sukkzessive erhalten wir nun $\alpha_k = 0$ für $k = 0, \ldots, \tilde{n}$, und somit $P(x) = 0$.
Seien nun $f(x)$ und $g(x)$ zwei Polynome vom Grad $\leq \tilde{n}$, welche die Daten $f^{(j)}(x_i)$ approximieren. Dann besitzt das Polynom $f(x) - g(x)$ den Grad $\leq \tilde{n}$ und approximiert die Daten $f^{(j)}(x_i) = 0$. Es besitzt also dieselbe Gesalt wie $P(x)$ und es gilt $f(x) - g(x) = 0$. Folglich haben wir Eindeutigkeit bewiesen. Auf den Beweis der Existenz sei hier verzichtet.

Aufgabe 5 (**Tschebyscheffpolynome**)

Für $n \geq 0$ ist das Tschebyscheff-Polynom T_n gegeben durch

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad \text{für } x \in [-1, 1].$$

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

a) Die Drei-Term-Rekursion

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$

b) Die Orthogonalität

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot T_n(x)T_m(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m, \\ \pi & \text{für } n = m = 0, \\ \pi/2 & \text{für } n = m \neq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Lösung 5 (Tschebyscheffpolynome)

a) Offensichtlich gilt für $x \in [-1, 1]$:

$$T_0(x) = \cos(0 \arccos x) = 1, \qquad T_1(x) = \cos(\arccos x) = x.$$

Die Rekursionsformel folgt direkt aus $\cos(n\theta) = 2\cos(\theta)\cos((n-1)\theta) - \cos((n-2)\theta)$ und der Substitution $x = \cos(\theta)$.

b) Substitution von $x = \cos\theta$ ergibt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot T_n(x)T_m(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\pi}^{0} \frac{1}{\sin\theta} \cos(n\theta)\cos(m\theta)(-\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{0}^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m, \\ \pi & \text{für } n = m = 0, \\ \pi/2 & \text{für } n = m \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$