

Kapitel 2

Finite Differenzen für die Poisson-Gleichung

In diesem Kapitel behandeln wir die Methode der Finiten Differenzen (Finite Difference Methods, FDM) im Spezialfall der Poisson-Gleichung (1.5) in $d = 2$ Raumdimensionen. Finite Differenzen sind für einfache Gebiete Ω sehr leicht zu implementieren, haben aber hohe Glattheitsanforderungen. Die Konvergenz folgt aus der Konsistenz der Differenzenapproximation und einer Stabilitätsaussage. Am Ende des Kapitels werden Verallgemeinerungen auf gleichmäßig elliptische Differentialgleichungen skizziert.

2.1 Einführung eines Gitters – Diskretisierung

Der erste Schritt zur numerischen Lösung der Poisson-Gleichung auf einem *Rechteckgebiet* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist die Einführung eines Gitters, das wir hier äquidistant in beiden Raumdimensionen wählen, Abb. 4. Die Gitterweite sei mit h bezeichnet. Als Menge von Gitterpunkten im Inneren erhalten wir

$$\Omega_h := \{(x, y) \in \Omega : x = ih, y = jh \quad \text{für } i = 1 : N, j = 1 : M\}$$

und als Randpunkte

$$\begin{aligned} \partial\Omega_h &:= \{(x, y) : x = ih, y = 0 \vee y = (M + 1)h, i = 0 : N + 1\} \\ &\cup \{(x, y) : x = 0 \vee x = (N + 1)h, y = jh, j = 0 : M + 1\}. \end{aligned}$$

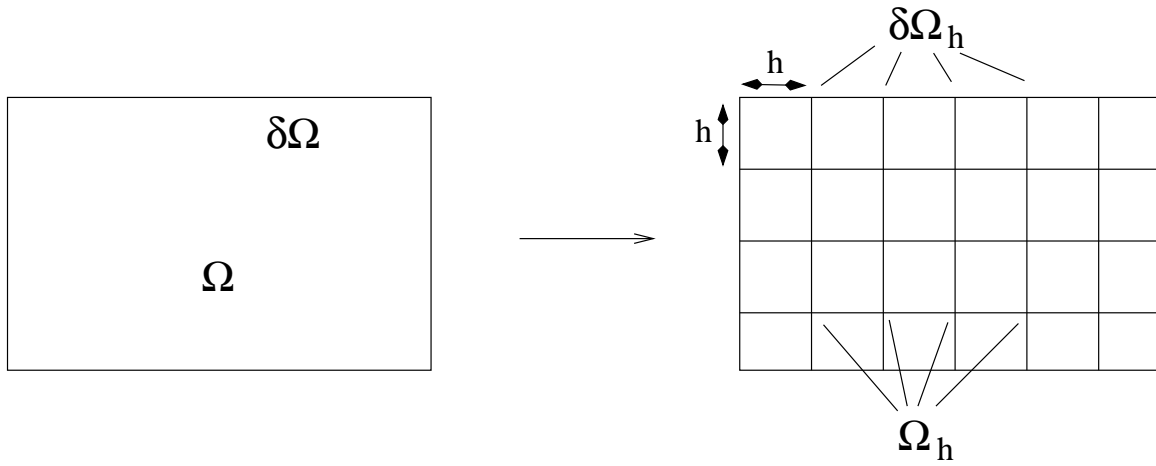


Abbildung 4: Diskretisierung eines Rechteckgebietes.

Dabei setzen wir voraus, dass ein Koordinatensystem mit dem Ursprung links unten eingeführt wurde und dass h passend gewählt ist, um alle vier Randsegmente exakt aufzulösen.

In jedem Gitterpunkt $Z_{i,j} = (x_i, y_j)$ ist nun eine Approximation $U_{i,j}$ der exakten Lösung $u(Z_{i,j})$ gesucht. Wir gehen zunächst von Dirichlet-RB $u = g$ auf $\partial\Omega$ aus. In diesem Fall sind die diskreten Werte $U_{i,j}$ auf dem Rand durch einfache Auswertung der Funktion g gegeben,

$$U_{i,j} = g(Z_{i,j}) \quad \text{für } Z_{i,j} \in \partial\Omega_h.$$

Sei nun $Z_{i,j} \in \Omega_h$ ein Punkt im Innern des Gebietes. Wir approximieren den Laplace-Operator Δu in $Z_{i,j}$ durch den diskreten *Differenzenoperator*

$$\Delta_h u(Z_{i,j}) := \frac{1}{h^2} (u(Z_{i+1,j}) + u(Z_{i-1,j}) + u(Z_{i,j+1}) + u(Z_{i,j-1}) - 4u(Z_{i,j})). \quad (2.1)$$

Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einem *Differenzenstern (Stencil)*, konkret hier dem *Fünf-Punkte-Stern*, denn zur Auswertung werden die sternförmig um $Z_{i,j}$ gelegenen Nachbarpunkte benötigt, Abb. 5.

Zur Lösung der Poisson-Gleichung ersetzen wir $-\Delta u = f$ in jedem inneren Gitterpunkt durch das diskrete Analog

$$-\Delta_h u(Z_{i,j}) = f(Z_{i,j}) \quad \text{für } i = 1 : N, j = 1 : M. \quad (2.2)$$

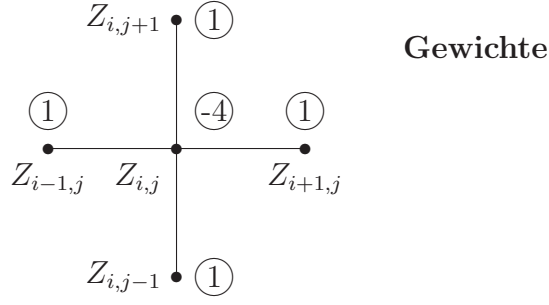


Abbildung 5: Standard-Fünf-Punkte-Stern.

Es resultiert die Forderung

$$4U_{i,j} - U_{i+1,j} - U_{i-1,j} - U_{i,j+1} - U_{i,j-1} = h^2 f(Z_{i,j}) \quad (2.3)$$

für $i = 1 : N$, $j = 1 : M$. Randpunkte mit den Indizes $U_{i,0}, U_{i,M+1}$ bzw. $U_{0,j}, U_{N+1,j}$, die in (2.3) auf der linken Seite stehen, sind durch die Auswertung von g gegeben und können auf die rechte Seite gebracht werden. Damit erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned}
4U_{i,j} - U_{i+1,j} - U_{i-1,j} - U_{i,j+1} - U_{i,j-1} &= h^2 f(Z_{i,j}) \quad i = 2 : N - 1, j = 2 : M - 1; \\
4U_{i,1} - U_{i+1,1} - U_{i-1,1} - U_{i,2} &= h^2 f(Z_{i,1}) + g(Z_{i,0}) \quad i = 2 : N - 1; \\
4U_{i,M} - U_{i+1,M} - U_{i-1,M} - U_{i,M-1} &= h^2 f(Z_{i,M}) + g(Z_{i,M+1}) \quad i = 2 : N - 1; \\
4U_{N,j} - U_{N-1,j} - U_{N,j+1} - U_{N,j-1} &= h^2 f(Z_{N,j}) + g(Z_{N+1,j}) \quad j = 2 : M - 1; \\
4U_{1,j} - U_{2,j} - U_{1,j+1} - U_{1,j-1} &= h^2 f(Z_{1,j}) + g(Z_{0,j}) \quad j = 2 : M - 1; \quad (2.4) \\
4U_{1,1} - U_{2,1} - U_{1,2} &= h^2 f(Z_{1,1}) + g(Z_{0,1}) + g(Z_{1,0}); \\
4U_{N,1} - U_{N-1,1} - U_{N,2} &= h^2 f(Z_{N,1}) + g(Z_{N+1,1}) + g(Z_{N,0}); \\
4U_{1,M} - U_{2,M} - U_{1,M-1} &= h^2 f(Z_{1,M}) + g(Z_{0,M}) + g(Z_{1,M+1}); \\
4U_{N,M} - U_{N-1,M} - U_{N,M-1} &= h^2 f(Z_{N,M}) + g(Z_{N+1,M}) + g(Z_{N,M+1}).
\end{aligned}$$

Um das Gleichungssystem in den $N \cdot M$ Unbekannten $U_{i,j}$ übersichtlicher zu schreiben, ordnen wir die Unbekannten im Vektor U_h lexikografisch an,

$$\begin{aligned}
U_h := & (U_{1,1}, U_{2,1}, \dots, U_{N,1}, \\
& U_{1,2}, U_{2,2}, \dots, U_{N,2}, \\
& \vdots \\
& U_{1,M}, U_{2,M}, \dots, U_{N,M}).
\end{aligned} \quad (2.5)$$

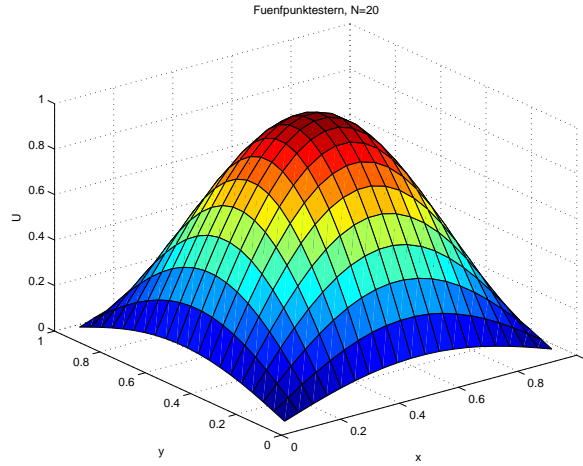


Abbildung 6: Lösung der Poisson-Gleichung auf dem Einheitsquadrat, Bsp. 2.1.

Die Unbekannten sind also zeilenweise sortiert. Das lineare Gleichungssystem fassen wir zusammen zu

$$A_h U_h = F_h, \quad (2.6)$$

wobei die $N \cdot M \times N \cdot M$ Matrix A_h und die rechte Seite F_h durch die entsprechend der Nummerierung zu wählenden Einträge aus (2.4) festgelegt sind.

Die Anwendung des Differenzenverfahrens des Fünfpunktsterns führt also auf das lineare Gleichungssystem (2.6). Jede Komponente des Vektors U_h stellt eine Approximation an die exakte Lösung in einem diskreten Gitterpunkt dar.

Beispiel 2.1: Fünfpunktstern im Einheitsquadrat

Wir lösen die Poisson-Gleichung auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ mit Nullrandbedingungen $g(x, y) = 0$ auf $\partial\Omega$. Als Gitterweite setzen wir $h = 1/(N + 1)$. Darüberhinaus ist $M = N$, so dass (2.6) ein lineares Gleichungssystem in $N \cdot N$ Unbekannten wird. Im Fall der lexikografischen Anordnung (2.5) der Unbekannten hat die Matrix A_h *Blocktridiagonalgestalt*, d.h.,

$$A_h = \begin{pmatrix} B & -I & & 0 \\ -I & B & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -I \\ 0 & & -I & B \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & 0 \\ -1 & 4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}.$$

In Abbildung 6 sieht man ein numerisches Beispiel mit $N = 20$ und $f(x, y) = 2\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y$ (exakte Lösung ist $u(x, y) = \sin \pi x \sin \pi y$).

Konsistenz. Wie gut approximiert der Differenzenoperator des Fünfpunkttesterns den Laplace-Operator? Dazu folgende Definition, bei der wir mit Δ_h den Fünfpunkttestern assoziieren, aber auch andere Differenzenverfahren zulassen.

Definition 2.1 *Konsistenz*

Das Differenzenverfahren Δ_h ist konsistent mit dem Laplace-Operator Δ , falls

$$\Delta u - \Delta_h u = \gamma(h) \quad \text{und} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \gamma(h) = 0 \quad \text{auf } \Omega_h$$

für alle Funktionen $u \in C^2(\bar{\Omega})$ gilt. Das Verfahren hat die Konsistenzordnung k , wenn für $u \in C^{2+k}(\bar{\Omega})$

$$\Delta u - \Delta_h u = O(h^k) \quad \text{auf } \Omega_h$$

für $h \rightarrow 0$ gilt.

Der Fünfpunkttestern hat die Konsistenzordnung 2, denn für kleine Schrittweiten h ist

$$\Delta u(Z_{i,j}) - \Delta_h u(Z_{i,j}) = O(h^2). \tag{2.7}$$

Beweis:

$$u(x+h, y) = u(x, y) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y) + O(h^4),$$

$$u(x-h, y) = u(x, y) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) - \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y) + O(h^4).$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = \frac{1}{h^2} (u(x+h, y) + u(x-h, y) - 2u(x, y)) + O(h^2).$$

Analog ergibt sich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \frac{1}{h^2} (u(x, y+h) + u(x, y-h) - 2u(x, y)) + O(h^2).$$

Mit Einsetzen von $(x, y) = Z_{i,j}$ folgt die Behauptung.

Aus der Konsistenz folgt noch nicht die Konvergenz. Dazu braucht man zusätzlich eine Stabilitätsaussage, siehe den nächsten Abschnitt. Auch ist noch nicht geklärt, ob das lineare Gleichungssystem (2.6) überhaupt eine eindeutige Lösung besitzt. Zuvor besprechen wir aber kurz Erweiterungen des Differenzenverfahrens.

Neumann-Randbedingungen. Bei Vorliegen von Neumann-Randbedingungen $\partial u / \partial \nu = \alpha$ auf einem Randstück ist die Diskretisierung zu modifizieren. Wir betrachten die Situation, dass auf der linken Kante

$$\Gamma_{N,h} := \{(x, y) : x = 0, y = jh, j = 1 : M\}$$

des Rechteckgebietes Ω_h Randbedingungen der Form

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial \nu(x, y)} = \frac{-\partial u(x, y)}{\partial x} = \alpha(x, y)$$

vorliegen. Einfachster Ansatz ist der einseitige Differenzenquotient

$$\frac{u(x_0, y_j) - u(x_1, y_j)}{h} = \alpha(x_0, y_j), \quad j = 1 : M. \quad (2.8)$$

Die diskreten Werte $U_{0,j} \doteq u(x_0, y_j)$ sind nun weitere Unbekannte, die über (2.8) gegeben sind. Offensichtlich bringt dieses Vorgehen einen zusätzlichen Konsistenzfehler der Größenordnung $O(h)$ für die Variablen $U_{0,j}$ ins Spiel.

Eine bessere Konsistenz der Ordnung $O(h^2)$ erhält man mit dem symmetrischen Differenzenquotienten

$$\frac{u(x_{-1}, y_j) - u(x_1, y_j)}{2h} = \alpha(x_0, y_j), \quad j = 1 : M. \quad (2.9)$$

Als weitere Unbekannten hat man hier die Werte $u(x_{-1}, y_j)$ links des Randes, die aus (2.9) folgen. Darüberhinaus sind die Werte $u(x_0, y_j)$ auf dem Rand unbekannt. Um sie zu berechnen, wird der Differenzenoperator auch für die Randpunkte ausgewertet. Über (2.9) werden dann die Punkte $Z_{-1,j}$ in das lineare Gleichungssystem eingearbeitet.

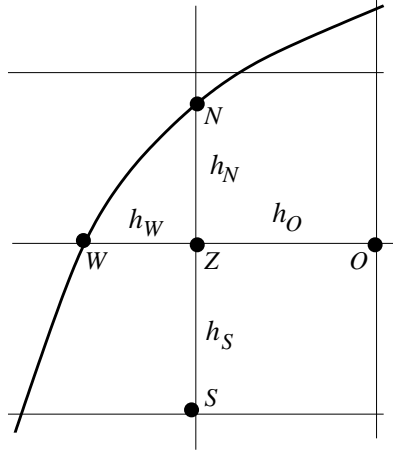


Abbildung 7: Krummliniger Rand und Differenzenstern

Krummliniger Rand. Bei Gebieten mit komplexeren Geometrien ist die Diskretisierung zu modifizieren, um den Rand aufzulösen. Zunächst diskretisiert man Ω äquidistant mit Schrittweite h . Sind nicht alle vier äquidistanten Nachbarn eines Punktes in $\bar{\Omega}$, werden zusätzliche *Randpunkte* erzeugt.

Abb. 7 illustriert die Situation anhand eines konvexen Randstücks mit dem Zentralpunkt Z und den nach den Himmelsrichtungen bezeichneten Nachbarn O, W, N, S . Der Punkt Z hat zwei Nachbarn W und N , die auf dem Rand liegen, aber nicht durch das äquidistante Gitter erfasst werden. Die Schnittpunkte des Gitters mit dem Rand legen die Punkte W und N fest. Es ist $W = Z + (h_W, 0)$ sowie $N = Z + (0, h_N)$ mit Schrittweiten $h_W < h, h_N < h$.

Die Differenzenapproximation ist bei solchen Rändern zu modifizieren. Man zeigt durch Taylorentwicklung

$$\begin{aligned}
 u_{xx}(Z) &= -\frac{2u(Z)}{h_O h_W} + \frac{2u(O)}{h_O(h_O + h_W)} + \frac{2u(W)}{h_W(h_O + h_W)} + O(h), \quad (2.10) \\
 u_{yy}(Z) &= -\frac{2u(Z)}{h_S h_N} + \frac{2u(S)}{h_S(h_S + h_N)} + \frac{2u(N)}{h_N(h_S + h_N)} + O(h).
 \end{aligned}$$

Lässt man die $O(h)$ -Terme auf der rechten Seite von (2.10) weg, erhält man

eine Modifikation des Fünfpunktsterns für nicht äquidistante Schrittweiten,

$$\Delta_h u(Z) := -\frac{2u(Z)}{h_O h_W} + \frac{2u(O)}{h_O(h_O + h_W)} + \frac{2u(W)}{h_W(h_O + h_W)} \quad (2.11)$$

$$-\frac{2u(Z)}{h_S h_N} + \frac{2u(S)}{h_S(h_S + h_N)} + \frac{2u(N)}{h_N(h_S + h_N)}.$$

Im Zusammenhang mit der Auflösung krummliniger Ränder bezeichnet man dieses Differenzenverfahren auch als *Shortley-Weller-Schema*. Für äquidistante Schrittweiten stimmt das Verfahren mit dem Standard-Fünfpunktstern überein. Die Konsistenzordnung ist bei nicht äquidistanten Schrittweiten aufgrund von (2.10) um 1 erniedrigt.

Wie man sich leicht überlegt, stößt dieses Vorgehen bei einspringenden Ecken schnell auf Schwierigkeiten. Hier zeigt sich einer der Nachteile der Methode der Finiten Differenzen: Komplexe Geometrien sind nur schwierig aufzulösen und machen die Verfahren unhandlich.

Um im folgenden nicht nur Rechteckgebiete zu behandeln, sondern auch allgemeinere Geometrien, verwenden wir statt der Differenzenformel (2.3) den Fünfpunktstern für die Poisson-Gleichung im nicht äquidistanten Fall (2.11) und schreiben

$$\alpha_Z U_Z + \alpha_O U_O + \alpha_W U_W + \alpha_N U_N + \alpha_S U_S = h^2 f(Z). \quad (2.12)$$

Dabei stehen U_l , $l \in \{Z, O, W, N, S\}$, für die numerischen Approximationen in den diskreten Punkten. Die Koeffizienten α_l ergeben sich aus den Schrittweitenverhältnissen nach (2.11).

Algorithmus 2.1 *FDM für das Dirichlet-Problem*

- 1.) Wähle Grundschriftweite $h > 0$ und bestimme Ω_h sowie $\partial\Omega_h$.
- 2.) Wähle eine Nummerierung der Unbekannten U_Z für $Z \in \Omega_h$.
- 3.) Aufstellen der Differenzengleichung

$$\alpha_Z U_Z + \alpha_O U_O + \alpha_W U_W + \alpha_N U_N + \alpha_S U_S = h^2 f(Z)$$

für alle $Z \in \Omega_h$.

4.) Falls Randpunkte U_R mit $R \in \partial\Omega_h$ in der Differenz auf der linken Seite auftreten, sind diese über die Randbedingung $u(R) = g(R)$ auszuwerten und auf die rechte Seite zu bringen.

5.) Erstelle das lineare Gleichungssystem

$$A_h U_h = F_h \quad (2.13)$$

mit entsprechend der Nummerierung angeordneten Unbekannten

$$U_h = (U_{Z_i})_{i=1:n}, \quad Z_i \in \Omega_h.$$

6.) Löse das lineare Gleichungssystem und erhalte die diskreten Werte U_h als numerische Approximation.

Im Fall von gemischten Randbedingungen mit zusätzlichem Neumann-Rand sind die Approximationen (2.8) bzw. (2.9) entsprechend einzuarbeiten.

2.2 Analyse der Diskretisierung

Bisher haben wir nur den Begriff der Konsistenz eingeführt, die Konvergenz bleibt zu untersuchen. Wichtiges Hilfsmittel ist ein *diskretes Maximumprinzip*, das wir zunächst herleiten wollen. Wir verlangen a priori, dass die Gitterweite h klein genug gewählt wird, so dass die Menge der diskreten Punkte Ω_h zusammenhängend ist (andernfalls ist die Diskussion für jedes Teilgebiet separat zu führen).

Das Differenzenverfahren (2.12) im Punkt Z lautete

$$\sum_{l \in \{Z, O, W, N, S\}} \alpha_l U_l = h^2 f(Z).$$

Die Koeffizienten α_l haben dabei die Eigenschaften

$$\alpha_Z > 0, \quad \alpha_l < 0 \text{ für } l \in \{O, W, N, S\}, \quad \sum_{l \in \{Z, O, W, N, S\}} \alpha_l = 0. \quad (2.14)$$

Die ersten beiden Eigenschaften sind klar, zur letzten betrachte

$$\frac{2h^2}{h_O h_W} - \frac{2h^2}{h_O(h_O + h_W)} - \frac{2h^2}{h_W(h_O + h_W)} = h^2 \left(\frac{2(h_O + h_W) - 2h_W - 2h_O}{h_O h_W (h_O + h_W)} \right) = 0$$

und analog

$$\frac{2h^2}{h_S h_N} - \frac{2h^2}{h_S(h_S + h_N)} - \frac{2h^2}{h_N(h_S + h_N)} = 0.$$

Angenommen, es ist $f(Z) \leq 0$ in einem Punkt $Z \in \Omega_h$ und zugleich U_Z das Maximum über alle Nachbarn, d.h.

$$\sum_{l \in \{Z, O, W, N, S\}} \alpha_l U_l \leq 0, \quad U_Z \geq \max_{l \in \{O, W, N, S\}} U_l.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \{O, W, N, S\}} \alpha_l (U_l - U_Z) &= \sum_{l \in \{Z, O, W, N, S\}} \alpha_l (U_l - U_Z) \\ &= \sum_{l \in \{Z, O, W, N, S\}} \alpha_l U_l - U_Z \sum_{l \in \{Z, O, W, N, S\}} \alpha_l \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Da in der ersten Summe wegen $\alpha_l < 0$ und $U_l - U_Z \leq 0$ alle Summanden nicht negativ sind, muß zwingend gelten

$$U_Z = U_O = U_W = U_N = U_S,$$

die diskreten Werte sind in allen fünf Punkten des Sterns gleich. Damit sind wir in der Lage, den folgenden Satz zu zeigen.

Satz 2.1 *Diskretes Maximumprinzip*

Gegeben sei die Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ mit $f \leq 0$ in Ω und Dirichlet-RB $u = g$ auf $\partial\Omega$. Weiter seien Δ_h der Differenzenoperator (2.11) und $\{U_Z : Z \in \Omega_h \vee Z \in \partial\Omega_h\}$ die aus der Vorschrift (2.12) resultierenden numerischen Approximationen einschließlich der ausgewerteten Randpunkte. Falls

$$\max_{Z \in \Omega_h} U_Z \geq \max_{R \in \partial\Omega_h} U_R,$$

dann ist U_Z konstant. Andernfalls wird das diskrete Maximum auf dem Rand angenommen.

Bew.: Sei U_Z mit $Z \in \Omega_h$ ein globales Maximum im Innern. Wie oben gezeigt, stimmt dann U_Z mit allen vier Nachbarpunkten überein. Wir marschieren nun im Gitter eins weiter und betrachten einen der Nachbarpunkte als neuen Zentralpunkt. Wiederum greift diesselbe Argumentation, die diskreten Approximationen in allen vier Nachbarpunkte müssen übereinstimmen. Durch Marschieren bis zum Rand und Ausschöpfen aller Punkte in Ω_h folgt so, dass U_Z für alle $Z \in \Omega_h$ und $Z \in \partial\Omega_h$ immer denselben Wert annimmt, also konstant ist. \square

Analog zu den Aussagen im kontinuierlichen Fall (Satz 1.1) ergeben sich Folgerungen aus dem diskreten Maximumprinzip. So hat man auch ein diskretes Minimumprinzip: Ist $f \geq 0$ in Ω , dann ist die diskrete Lösung entweder konstant oder nimmt ihr Minimum auf dem Rand $\partial\Omega_h$ an. Weiter gilt ein *diskretes Vergleichsprinzip*: Sei V_h eine weitere diskrete Lösung (zu anderen Daten) und

$$-\Delta_h U_Z \leq -\Delta_h V_Z \quad \forall Z \in \Omega_h, \quad U_R \leq V_R \quad \forall R \in \partial\Omega_h.$$

Dann folgt $U_Z \leq V_Z$ in allen diskreten Punkten $Z \in \Omega_h$.

Eine weitere Folgerung ist

Satz 2.2 Gegeben sei die Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ mit Dirichlet-RB $u = g$ auf $\partial\Omega$. Weiter sei

$$A_h U_h = F_h$$

das aus der Vorschrift (2.12) resultierende lineare Gleichungssystem. Dann ist die Matrix A_h nicht singulär, und das lineare Gleichungssystem besitzt eine eindeutige Lösung.

Bew.: Das zugehörige homogene Gleichungssystem $A_h U_h = 0$ entspricht einer Diskretisierung von $-\Delta u = 0$ mit Nullrandbedingungen. Nach dem Maximumprinzip ist $U_Z \leq 0$ in allen Punkten $Z \in \Omega_h$, nach dem Minimumprinzip dagegen ist $U_Z \geq 0$. Also hat das homogene Gleichungssystem nur die triviale Lösung $U_h = 0$, und die Matrix A_h ist nicht singulär. \square

Globaler Fehler. Nachdem die Existenz der numerischen Lösung nachgewiesen ist, bleibt die Frage, wie gut das Differenzenverfahren die exakte Lösung approximiert. Für die Differenz $\Delta u - \Delta_h u$ hatten wir bereits den Begriff der Konsistenz und des Konsistenzfehlers eingeführt. Man könnte hier auch von einem *lokalen Fehler* sprechen. Weiter definieren wir:

Definition 2.2 *Globaler Fehler*

Der globale Fehler des Differenzenverfahrens Δ_h im Punkt $Z \in \Omega_h$ ist die Differenz

$$\eta(Z) := u(Z) - U_Z,$$

wobei $u(Z)$ die exakte Lösung und U_Z die numerische Approximation bezeichnen.

Wie hängen lokaler und globaler Fehler zusammen? Wir bezeichnen den lokalen oder Konsistenzfehler mit

$$r(Z) := \Delta u(Z) - \Delta_h u(Z) \quad \text{für } Z \in \Omega_h.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \Delta_h \eta(Z) &= \Delta_h u(Z) - \Delta_h U_Z \\ &= \Delta_h u(Z) + f(Z) \\ &= \Delta_h u(Z) - \Delta u(Z) \\ &= -r(Z). \end{aligned}$$

Diesen Zusammenhang formulieren wir als *diskretes Randwertproblem*

$$-\Delta_h \eta = r \quad \text{in } \Omega_h, \quad \eta = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_h. \quad (2.15)$$

Da auf dem Rand $\partial\Omega$ die Lösung exakt ist, verschwindet der globale Fehler η dort. Dieses Randwertproblem können wir, bei Einbezug der Nummerierung der Unbekannten, als lineares Gleichungssystem

$$A_h E = K \quad (2.16)$$

schreiben. Dabei ist A_h die Matrix (2.13) aus Algorithmus 2.1 sowie

$$E_i = \eta(Z_i), \quad K_i = r(Z_i) \quad \text{für } Z_i \in \Omega_h.$$

Man beachte, dass die Nullrandbedingungen für η im linearen Gleichungssystem bereits berücksichtigt sind.

Anhand des linearen Systems (2.16) können wir nun entscheiden, ob das Differenzenverfahren konvergiert. Der Fehlervektor E geht gegen Null, falls

$$(i) \quad \|K\| \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0 \quad (\text{Konsistenz})$$

und

$$(ii) \quad \text{die Inverse } A_h \text{ beschränkt bleibt.} \quad (\text{Stabilität})$$

Man sagt, *Konsistenz und Stabilität bewirken zusammen Konvergenz*. Die Aussage (ii) über die Beschränktheit kann man als $\|A_h^{-1}\| \leq C < \infty$ mit einer von h unabhängigen Konstante C formulieren. Doch welche Norm soll man wählen?

Alternativ hilft bei der Aussage (ii) das diskrete Maximumprinzip weiter. Dazu führen wir eine Skalierung

$$\tilde{\eta} := \eta/\gamma, \quad \tilde{r} := r/\gamma \quad \text{mit } \gamma := \max_{Z \in \Omega_h} |r(Z)|$$

durch und betrachten

$$-\Delta_h \tilde{\eta} = \tilde{r} \quad \text{mit } -1 \leq \tilde{r}(Z) \leq 1 \quad \forall Z \in \Omega_h.$$

Auf dem diskreten Rand $\partial\Omega_h$ verschwindet $\tilde{\eta}$ genauso wie η . Sei nun Ω beschränkt und im Kreis $B_\rho(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \rho^2\}$ enthalten. Die Funktion

$$w(x, y) := \frac{1}{4}(\rho^2 - x^2 - y^2)$$

ist ≥ 0 auf dem Rand und erfüllt $-\Delta w = -\Delta_h w = 1$ auf Ω_h . Also gilt

$$-\Delta_h \tilde{\eta} \leq -\Delta_h w \quad \text{in } \Omega_h, \quad \tilde{\eta} = 0 \leq w \quad \text{auf } \partial\Omega_h.$$

Mit dem diskreten Vergleichsprinzip schließen wir auf $\tilde{\eta} \leq w \leq 1/4 \rho^2$ in allen diskreten Punkten $Z \in \Omega_h$. Mit $\bar{w} := -w$ folgt analog $-1/4 \rho^2 \leq \tilde{\eta}$, so dass wir wegen $\tilde{\eta} \cdot \max_{Z \in \Omega_h} |r(Z)| = \eta$ insgesamt die Abschätzung

$$\max_{Z \in \Omega_h} |\eta(Z)| \leq \frac{1}{4} \rho^2 \max_{Z \in \Omega_h} |r(Z)| \quad (2.17)$$

erhalten. So können wir die Konvergenz zeigen:

Satz 2.3 *Sei $u \in C^3(\bar{\Omega})$ die Lösung der Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ mit Dirichlet-RB $u = g$ auf $\partial\Omega$. Weiter seien Δ_h der Differenzenoperator (2.11) und $\{U_Z : Z \in \Omega_h\}$ die aus der Vorschrift (2.12) resultierenden numerischen Approximationen. Dann konvergiert das Differenzenverfahren gegen die exakte Lösung, und es ist*

$$\max_{Z \in \Omega_h} |u(Z) - U_Z| = O(h) \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

Falls zusätzlich $u \in C^4(\bar{\Omega})$ und äquidistante Diskretisierung vorliegt, dann gilt

$$\max_{Z \in \Omega_h} |u(Z) - U_Z| = O(h^2) \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

Bew.: Aus der Konsistenz des Fünfpunktsterns resultiert $r(Z) = O(h)$ für alle $Z \in \Omega_h$. Die Abschätzung (2.17) liefert dann

$$\max_{Z \in \Omega_h} |\eta(Z)| \leq \frac{1}{4} \rho^2 C h.$$

Für $u \in C^4(\bar{\Omega})$ hat man im äquidistanten Fall aufgrund (2.7) eine h -Potenz mehr. \square

Bemerkungen

- Mit einer verfeinerten Analysetechnik kann die Konvergenzaussage im nicht äquidistanten Fall auf ebenfalls $O(h^2)$ verbessert werden.
- Für die Konvergenz reicht im übrigen schon $u \in C^2(\bar{\Omega})$ mit gleichmäßig stetigen Ableitungen u_{xx} sowie u_{yy} aus.

Die im Satz 2.3 vorausgesetzte Glattheit ist natürlich eine sehr einschneidende Voraussetzung, die man teilweise abschwächen kann. Literatur dazu und auch zum Einbezug von Neumann-RB:

Hackbusch, W.: Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen. Teubner, Stuttgart 1986

2.3 Erweiterungen der FDM

Das in diesem Kapitel exemplarisch anhand der Poisson-Gleichung vorgestellte Differenzenverfahren kann leicht auf eine größere Klasse elliptischer Gleichungen verallgemeinert werden. Dazu betrachten wir

$$Lu = f, \quad L := - \sum_{i,k=1}^d a_{ik}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}, \quad (2.18)$$

mit dem elliptischen Differentialoperator L . Die Matrix $A(x) = (a_{ik}(x))$ ist demnach symmetrisch positiv definit, und wir fordern zusätzlich, dass die Koeffizienten $a_{ik}(x)$ stetige Funktionen sind.

Definition 2.3 *Der elliptische Operator L aus (2.18) heißt gleichmäßig elliptisch, wenn mit einer Zahl $\alpha > 0$*

$$\xi^T A(x) \xi \geq \alpha \|\xi\|^2 \quad \text{für } \xi \in \mathbb{R}^d \text{ und } x \in \Omega$$

gilt. Die Zahl α ist die Elliptizitätskonstante.

Im Fall $L = -\Delta$ ist $\alpha = 1$, wie man schnell nachrechnet.

Für Randwertprobleme mit gleichmäßig elliptischen Differentialoperatoren gilt ebenfalls das Maximumprinzip (Satz 1.1). Zur numerischen Lösung von $Lu = f$ im Gebiet Ω geht man wie bei der Poisson-Gleichung vor:

- 1) Diskretisierung $\Omega \rightarrow \Omega_h$ und $\partial\Omega \rightarrow \partial\Omega_h$
- 2) Approximation der Differentialquotienten bzw. Ableitungen von L durch Differenzenquotienten. Das so gewonnene Differenzenverfahren schreibt man

kurz als Differenzenoperator L_h . Seine Konsistenzordnung k ist gegeben über

$$Lu - L_h u = O(h^k)$$

für $u \in C^{2+k}(\bar{\Omega})$. Die Anwendung von L_h in einem Punkt $Z \in \Omega_h$ liefert dann eine Differenzenformel der Gestalt

$$\begin{aligned} &\alpha_Z U_Z + \alpha_O U_O + \alpha_W U_W + \alpha_N U_N + \alpha_S U_S \\ &+ \alpha_{NO} U_{NO} + \alpha_{NW} U_{NW} + \alpha_{SW} U_{SW} + \alpha_{SO} U_{SO} = h^2 f(Z). \end{aligned}$$

Das Verfahren wird oft auch als Differenzenstern

$$\begin{bmatrix} \alpha_{NW} & \alpha_N & \alpha_{NO} \\ \alpha_W & \alpha_Z & \alpha_O \\ \alpha_{SW} & \alpha_S & \alpha_{SO} \end{bmatrix}_*$$

angeschrieben.

3) Krummlinige Ränder können über eine nicht äquidistante Diskretisierung am Rand aufgelöst werden und führen zu entsprechenden Modifikationen im Verfahren L_h . Resultat der Diskretisierung ist nach Nummerierung der Unbekannten wiederum ein lineares Gleichungssystem $A_h U_h = F_h$.

4) Auch für das Verfahren L_h kann man unter den Voraussetzungen

$$\sum \alpha_l = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_l < 0 \quad \text{für} \quad l \neq Z$$

an die Koeffizienten das diskrete Maximumprinzip aus Satz 2.1 nachweisen.

5) Die Konvergenztheorie läuft dann analog zu Abschnitt 2.2, wobei allerdings an gewissen Stellen die Elliptizitätskonstante α in die Abschätzungen eingeht.

Stabilitätstheorie mit M-Matrizen. Als Alternative zum diskreten Maximumprinzip kann man die Konvergenz der FDM auch mit der Theorie der sogenannten M-Matrizen zeigen. Ausgangspunkt ist die in Abschnitt 2.2 hergeleitete Beziehung

$$A_h E = K$$

(Formel (2.16)) zwischen dem Vektor der globalen Fehler E und dem Vektor der Konsistenzfehler K in den diskreten Gitterpunkten. Offensichtlich ist

$$\|E\| \leq \|A_h^{-1}\| \cdot \|K\|,$$

und somit folgt die Konvergenz, wenn man die Norm der Inversen von A_h unabhängig von der Gitterweite h abschätzen kann.

Ohne in die Details zu gehen, seien hier die wesentlichen Resultate in diesem Zusammenhang aufgeführt.

Definition 2.4 *Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt M-Matrix, falls*

$$a_{ij} \leq 0 \quad \text{für } i \neq j, \quad A^{-1} \text{ existiert,} \quad A^{-1} \geq 0.$$

Die Relation $A^{-1} \geq 0$ ist dabei komponentenweise zu verstehen. Die beiden letzten Eigenschaften in der Definition kann man alternativ auch über die *inverse Monotonie* ausdrücken, bei der aus $Ax \leq Ay$ folgt $x \leq y$ (wiederum komponentenweise).

Satz 2.4 *M-Kriterium*

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $a_{ij} \leq 0$ für $i \neq j$. A ist inversmonoton und damit M-Matrix genau dann, wenn es einen Vektor $e > 0$ gibt mit $Ae > 0$. Es gilt in diesem Fall zudem die Abschätzung

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{\|e\|_{\infty}}{\min_k (Ae)_k}.$$

(Beweis siehe Übung)

Mit geschickter Wahl des Vektors e und Anwendung von Satz 2.4 ist es so möglich, für verschiedene Diskretisierungsverfahren Schranken für die Norm der Inversen von A_h anzugeben. Z.B. beim Standard-Fünfpunktstern auf dem Einheitsquadrat zeigt man auf diese Art und Weise

$$\|A_h^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{8}.$$

Abschätzungen bezüglich der 2-Norm findet man in Hackbusch, s.o.