PROF. DR. BERND SIMEON
CHRISTIAN GOBERT
THOMAS MÄRZ

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Numerik

SS 2009

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 *Numerische Berechnung der Jacobimatrix*
Bei numerischer Differentiation wird die Ableitung f' einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle x durch einen Differenzenquotienten approximiert, zum Beispiel durch $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (Vorwärtsdifferenz).

a) Man formuliere einen Algorithmus zur numerischen Berechnung der Jacobimatrix $DF(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ von $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ unter Verwendung von Vorwärtsdifferenzen. Dabei soll die Funktion F nur $n+1$ mal aufgerufen werden. Setzen Sie $h = \sqrt{\text{eps}}$. Wieviele Stellen Genauigkeit erwarten Sie?

b) Bei großen Gleichungssystemen ist $DF(x)$ in der Regel dünn besetzt (englisch: sparse) und der Aufwand zur Ermittlung von $DF(x)$ kann reduziert werden. Dazu definiert man:
Die *Mustermatrix* von F ist die $n \times n$-Matrix $T_F = (\tau_{i,j})$ mit $\tau_{i,j} = 0$, falls die i-te Komponente F_i von F unabhängig von der j-ten Komponente x_j von x ist, sonst ist $\tau_{i,j} = 1$.
Zeigen Sie: Falls die Mustermatrix tridiagonal ist, kann DF mit 4 Auswertungen von F unabhängig von der Dimension n numerisch berechnet werden. Machen Sie sich das zunächst an einem Beispiel mit $n = 6$ deutlich.

Aufgabe 2 *QR-Zerlegung (vgl. Klausur SoSe 2008)*
Für diese Aufgabe sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$ mit vollem Spaltenrang und $b \in \mathbb{R}^m$.

a) Es sei $\tilde{Q}\tilde{R} = (A\ b) \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ die reduzierte QR-Zerlegung der um die Spalte b ergänzten Matrix A. Die Diagonale von $\tilde{R}$ ist dabei positiv.
Zeigen Sie: Mit $\tilde{R} = \begin{pmatrix} R & r \\ & \rho \end{pmatrix}$, wobei $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $r \in \mathbb{R}^n, \rho \in \mathbb{R}$, gilt für die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ des linearen Ausgleichsproblems

$$||b - Ax||_2 = \min!$$

dass

$$Rx = r, \qquad \rho = ||b - Ax||_2$$

b) Geben Sie ein Matlab-Programm an, dass die Methode aus (a) implementiert, um das Ausgleichsproblem *ohne Verwendung* von Q zu lösen.