PROF. DR. BERND SIMEON
CHRISTIAN GOBERT
THOMAS MÄRZ

Numerik

SS 2009

Programmieraufgabe 1

Aufgabe 1 *Summatorische Simpsonquadratur*

Als Näherungsformel für das bestimmte Integral über eine gegebene Funktion auf dem Intervall $[a, b]$ dient die bekannte Fassregel, die der Astronom Johannes Kepler im Jahre 1615 für die Linzer Weinbauern erfand

$$\int_a^b g(x)\ dx \approx \frac{b-a}{6}(g_0 + 4g_1 + g_2) =: J$$

mit $g_i := g(a + i(b-a)/2)$.
Schreiben Sie ein Programm zur summatorischen Simpsonquadratur, d.h. zur Berechnung des Integrals

$$\int_a^b g(x)\ dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{a+(i-1)h}^{a+ih} g(x)\ dx$$

wobei jedes Teilintegral $\int_{a+(i-1)h}^{a+ih} g(x)dx$ durch Simpsonquadratur approximiert werden soll.
Die Anzahl der Intervallteilungen n soll dem Programm als Parameter vorgegeben werden können.

i) Testen Sie Ihr Programm anhand des folgenden Beispiels:

$$I = \int_0^1 x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\ dx$$

ii) Erstellen Sie außerdem ein Aufwands-Genauigkeits-Diagramm für die summatorische Simpsonquadratur mit Hilfe der folgenden Beispielfunktionen:

$$I = \int_1^{30} \frac{\ln x}{x}\ dx \qquad \text{Exakter Wert: } I = 0.5(\ln 30)^2 = 5.78407181451275...$$

und $$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1 + Ax^2}\ dx \qquad \text{mit } A = 10 \text{ und } A = 100.$$

Ermitteln Sie aus diesem Diagramm die Ordnung des Verfahrens mittels linearer Ausgleichsrechnung.

Aufgabe 2 *Adaptive Simpsonquadratur*

Wendet man die Simpsonregel separat auf jeweils die zwei Hälften des Integrationsintervalls an, dann ergibt sich

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{12}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4) =: \hat{J}$$

mit $f_i := f(a + i(b-a)/4)$.
Die näherungsweise Berechnung des bestimmten Integrals mittels angepasster Schrittweite (adaptive Simpson-Regel, nach Thomas Simpson, 1710-1761) besteht darin, zunächst die beiden Näherungen J und $\hat{J}$ für das Intervall von a bis b zu berechnen. Nach Algorithmus 1.1 wird bei vorgegebener Genauigkeit TOL im Fall

$$|J - \hat{J}| \leq 15\ \mathrm{TOL}$$

der genauere Wert $\hat{J}$ als Näherung für das Integral akzeptiert. Andernfalls teilt man das Intervall in eine linke und eine rechte Hälfte, die nacheinander genauso behandelt werden wie das ursprüngliche Intervall. Befindet man sich im Teilintervall $[a_i, b_i] \subset [a, b]$, dann ist als Genauigkeitsforderung

$$|J_i - \hat{J}_i| \leq 15\,\frac{b_i - a_i}{b-a}\ \mathrm{TOL}$$

zu verwenden. Begründen Sie diese Formel.

Die Intervallhalbierungen werden solange wiederholt, bis die Toleranzforderung erfüllt (reguläres Ende) oder eine minimale Schrittweite erreicht ist (Fehlerabbruch). Die minimale Schrittweite sei z.B. 10^{-5}. Falls die minimale Schrittweite erreicht wird, soll das Programm eine entsprechende Meldung liefern. Die Integralwerte der gefundenen Teilintervalle werden addiert.

Schreiben Sie eine Matlab Funktion `simpad`, die die adaptive Simpsonregel ausführt. Dabei bietet sich eine rekursive Programmierung an, da eine Matlab Funktion wieder sich selbst aufrufen darf. Neben der Näherung für den Integralwert sollen auch alle Stützstellen, an denen die Funktion f ausgewertet wird, in einem Vektor gespeichert werden. Diese geben dann einen Überblick der adaptiven Stützstellenwahl, insbesondere ermöglicht der Vektor eine grafische Darstellung. Die Funktion soll folgende Aufrufliste besitzen:

```
function [I,knoten] = simpad(a,b,tol,f)
% a         linker Intervallrand
% b         rechter Intervallrand
% tol       Genauigkeitsforderung
% f         Name der zu integrierenden Funktion
% I         Naeherung fuer Integralwert
% knoten    Vektor mit Stuetzstellen
```

Die zu integrierenden Funktionen f sollen in jeweils eigenen Matlab Funktionen implementiert werden (`function f = fname(x)`). Die Auswertungen im Programm `simpad` erfolgen dann über den Befehl `feval` (siehe Hinweise am Ende).

Die Funktionsauswertungen von f, welche eventuell in einer Verfeinerung des Integrationsintervalls benötigt werden, sind aus Effizienzgründen zwischenzuspeichern. An keiner Stützstelle darf die Funktion mehrmals ausgewertet werden. Beispielsweise kann die Funktion `simpad` eine weitere Funktion `simpcore` aufrufen, welche die eigentliche Rekursion ausführt. An `simpcore` können die drei jeweils relevanten Funktionsauswertungen übergeben werden.

Testen Sie die Matlab Funktion an den folgenden Beispielen. Plotten Sie auch die integrierten Funktionen zusammen mit den benötigten Stützstellen.

Testbeispiele:

i)

$$I = \int_0^1 x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\, dx$$

TOL $= 10^{-8}$

ii) Erstellen Sie für die adaptive Simpsonquadratur ein Aufwands-Genauigkeits-Diagramm mit Hilfe der Beispielfunktionen

$$I = \int_1^{30} \frac{\ln x}{x}\, dx \qquad \text{Exakter Wert: } I = 0.5(\ln 30)^2 = 5.78407181451275...$$

und $$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1 + Ax^2}\, dx \qquad \text{mit } A = 10 \text{ und } A = 100.$$

Wählen Sie TOL $= 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Ergebnis aus Aufgabe 1.

iii) Testen Sie außerdem das Verhalten Ihres Integrators für das folgende Beispiel

$$I = \int_0^1 e^{\alpha x}\, dx$$

mit $\alpha = 1, 10, 100$. Wählen Sie hier TOL $= 10^{-3}$.

Hinweise zu `feval` :

Liegt eine Matlab Funktion der Form
```
function ergebnis = tfkt(x)
```
vor, so kann eine andere Funktion beliebige Funktionen dieser Form auswerten über
```
function f = auswertung(fname,x)
f = feval(fname,x); % liefert f = fname(x)
```
und der Aufruf für die konkrete Funktion erfolgt durch
```
f = auswertung('tfkt',x)
```
oder
```
f = auswertung(@tfkt,x)
```
in der Matlab Befehlszeile. Näheres kann auch in der Matlab Hilfe zu `feval` gefunden werden.

Bitte bearbeiten Sie das Blatt in Gruppen zu dritt. Zur Testaterteilung vereinbaren Sie bitte einen Termin mit Ihrem Tutor. Der Termin soll in der Woche vom 18.-22.5. liegen. An dem Termin müssen alle drei Gruppenmitglieder teilnehmen.