

Peano- und Hilbert-Kurven

Zwei stetige, reellwertige Funktionen $x(t), y(t)$, $t \in I := [0, 1]$ sind die gängige Darstellung einer stetigen Kurve in der Ebene. Erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts wurde klar, dass diese Definition auch Exoten umfasst, die zum Beispiel *jeden* Punkt im Einheits-Quadrat I^2 oder Einheits-Dreieck $\Delta := \text{conv}\{(-1, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ erreichen (und nicht nur beliebig nahe kommen). Hilbert und Peano haben dafür je ein Beispiel angegeben. Seinerzeit eher als Kuriositäten angesehen, mit denen man die Sorgfalt in der Lehre stärken konnte, hat die Idee hinter solchen Beispielen inzwischen sehr befruchtend auf Bahnbrecher in der Computer-Numerik gewirkt. Hier noch einmal eine kurze Erinnerung an diese Idee.

Das Einheits-Intervall I lässt sich durch wiederholte Bisektion in **Teilintervalle** $I_k := [k-1, k]/2^n$ zerlegen. Die natürliche Reihenfolge ist von links nach rechts, also $k = 1, \dots, 2^n$ bei Stufe $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Auch das Einheits-Dreieck Δ lässt sich durch wiederholte Bisektion an der Mittelsenkrechten in kongruente **Teildreiecke** Δ_k zerlegen mit $k = 1, \dots, 2^n$ bei Stufe n , und auch hier gibt es eine natürliche Reihenfolge, nämlich die **fortlaufende**, bei der Dreieck Δ_k an Dreieck Δ_{k+1} grenzt. Am besten macht man das rekursiv, indem man beim Übergang von $n-1$ zu n das k -te Dreieck zerlegt in die Hälften mit den Nummern $2k-1$ und $2k$, und zwar $2k-1$ für die Hälfte, welche an Teildreieck $k-1$ angrenzt und $2k$ für die andere Hälfte, welche an Teildreieck $k+1$ angrenzt. **Fortlaufend in Stufe $n-1$** führt so zu **fortlaufend in Stufe n** (Abb. 1). Überblicken lässt sich diese Reihenfolge durch ein Polygon, das die Mittelpunkte der 2^n Dreiecke geradlinig verbindet (Abb. 2).

Durch die gemeinsame Nummerierung ergibt sich eine korrespondierende **Schachtelung** der Teilintervalle und der Teildreiecke in den verschiedenen Stufen: die Intervalle I_{2k-1} und I_{2k} der Stufe n sind beide enthalten im Intervall I_k der Stufe $n-1$. Ebenso ist es auch bei den Dreiecken: die Dreiecke Δ_{2k-1} und Δ_{2k} der Stufe n sind beide enthalten im Dreieck Δ_k der Stufe $n-1$.

Diese Korrespondenz der Schachtelungen erlaubt nun, jedem Punkt $t \in I$ einen Punkt x, y in Δ zuzuordnen, also eine Abbildung $I \rightarrow \Delta$ zu definieren: ein beliebiger Punkt t von I sei in den geschachtelten Teilintervallen $I_{k(n)}$ der Stufen $n = 0, 1, 2, \dots$ enthalten. (Falls t ein endlicher Dualbruch ist, dann liegt es von irgend einer Stufe an auf einem Intervall-Ende und man kann wählen zwischen zwei möglichen Teilintervallen). Die entsprechende Folge von Teildreiecken $\Delta_{k(n)}$ ist dann auf Grund der Korrespondenz eine Einschachtelung für einen Punkt von Δ , eben $x(t), y(t)$.

Es ist dann nicht schwer zu zeigen, dass die Abbildung $t \mapsto x(t), y(t)$ stetig und surjektiv ist:

Liegen t und t' in einem Teilintervall oder in zwei benachbarten Teilintervallen, dann liegen auch $x(t), y(t)$ und $x(t'), y(t')$ in einem Teildreieck oder in zwei benachbarten. Zu jeder Abstands-Toleranz ϵ auf Δ kann man also eine Abstands-Toleranz δ auf I angeben, die hinreichend ist.

Liegt umgekehrt ein beliebiger Punkt a, b von Δ in den Teildreiecken $\Delta_{k(n)}, n = 0, 1, 2, \dots$, dann definiert die korrespondierende Schachtelung der Teilintervalle $I_{k(n)}$ ein t und es ist offensichtlich $x(t) = a, y(t) = b$.

Statt mit einer stetigen Kurve das gesamte Dreieck Δ lückenlos auszufüllen, kann man auch das Einheits-Quadrat ausfüllen. Entweder macht man das durch Zerlegung von I^2 entlang einer Diagonale (Abb. 3) in zwei Dreiecke und benutzt obige Konstruktion, um eine Kurve von A nach B zu erzeugen als Bild von $[0, 1/2]$ und eine zweite Kurve von B zurück nach A als Bild von $[1/2, 1]$. (Punkte auf der Diagonale haben Urbilder in $[0, 1/2]$ und in $[1/2, 1]$).

Von Hilbert stammt eine alternative Konstruktion. Er zerlegt jedes Intervall in *vier* gleichlange Teilintervalle und jedes Quadrat durch Bisektion parallel zur x -Achse sowie Bisektion parallel zur y -Achse in vier Teilquadrate. In der n -ten Rekursions-Stufe hat man dann die Teilintervalle und Teilquadrate $k = 1, 2, \dots, 4^n$. Wieder benötigt man nichts als eine fortlaufende Nummerierung so, dass Teilquadrat k und $k + 1$ an einander grenzen. Und wieder geht das ganz bequem rekursiv: Man setzt zwei Teilquadrate der Stufe $n - 1$ mit ihren Nummern und Polygonen neben einander und setzt darüber zwei ebensolche Teilquadrate der Stufe $n - 1$, doch gespiegelt an jeweils einer der beiden Diagonalen (Abb. 4). Dann steht jeweils links oben die Nummer 1 und rechts oben die Nummer 4^n . Die Visualisierung durch geradliniges Verbinden der Mittelpunkte aller Teilquadrate einer Stufe in der erzeugten Reihenfolge gibt Mäander-Polygone von links oben nach rechts oben (Abb. 5). Die übrige Argumentation bleibt unverändert und beweist so wieder die Existenz einer stetigen, surjektiven Abbildung $I \rightarrow I^2$.

Schließlich kann man die Bisektion in x - und y -Richtung noch ersetzen durch zwei Trisektionen (und die Viertelung der Intervalle durch eine Neuntelung). Dann kann man leicht die erforderliche fortlaufende Nummerierung so einrichten, dass der Startpunkt links oben und der Endpunkt rechts unten ist (Abb. 6). Die Vorteile dieser Variante zeigt Professor Zenger in seinem Referat. Unter anderem kann man so auch stetige, surjektive Abbildungen $I \rightarrow I^m$ konstruieren für die Dimensionen $m > 2$.

Abb. 5 findet sich auch im WWW unter de.wikipedia.org/wiki/Hilbert-Kurve. Dort im Abschnitt **Weblinks** findet sich auch ein Verweis auf das pdf-Dokument *Raumfüllende Kurven - TUM Informatik* von Michael Bader.

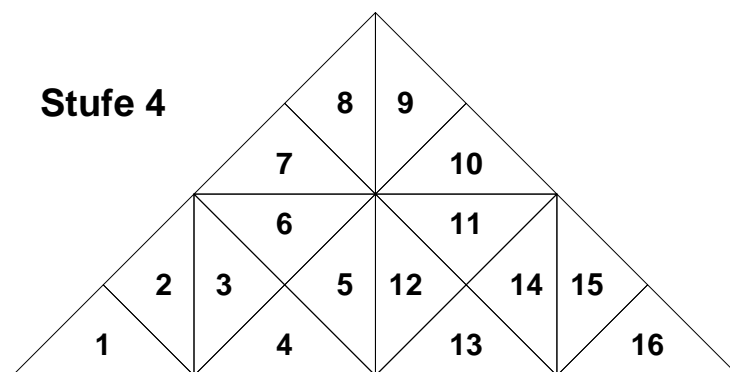
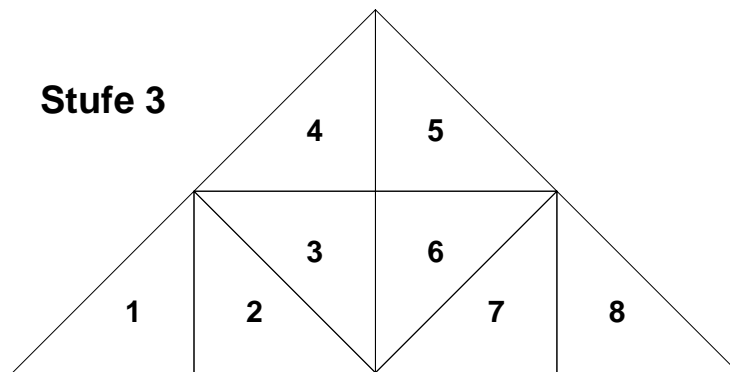
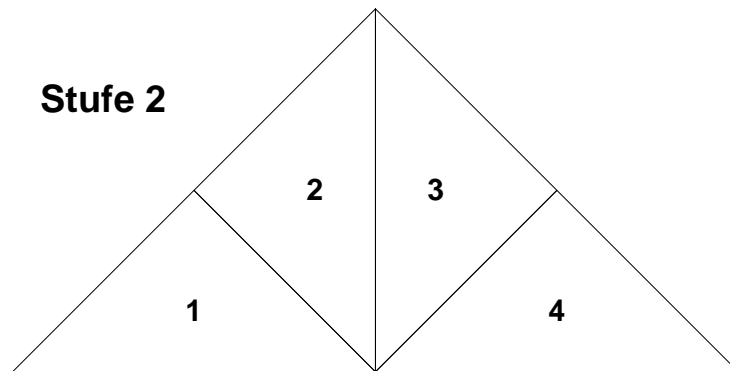
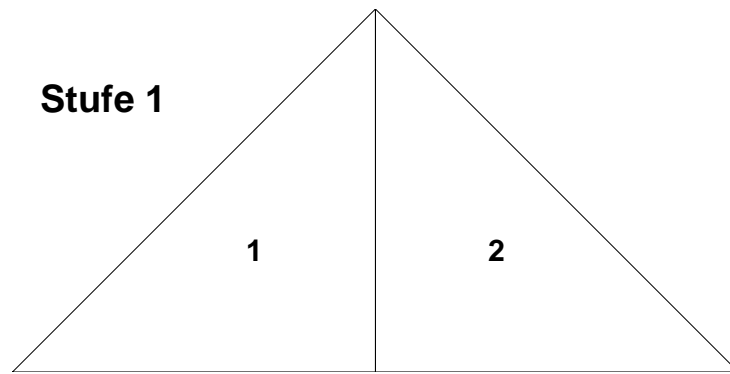


Abb. 1 Peano: Fortlaufende Nummerierung der Dreiecke

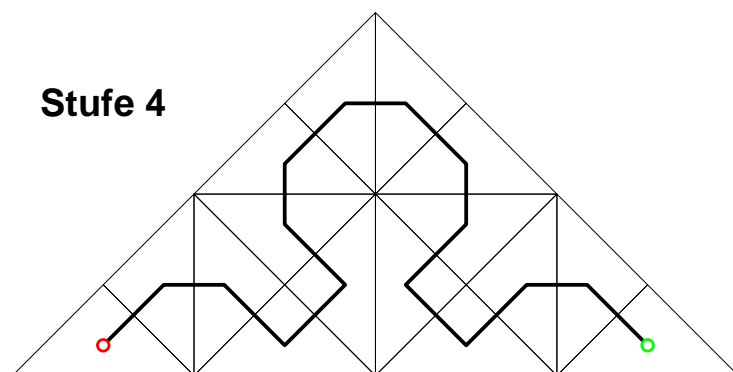
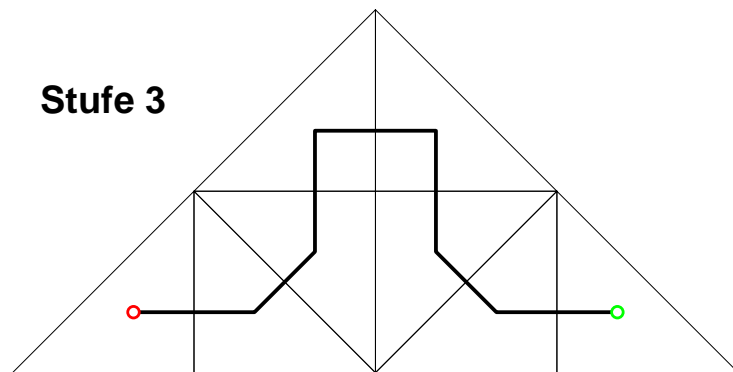
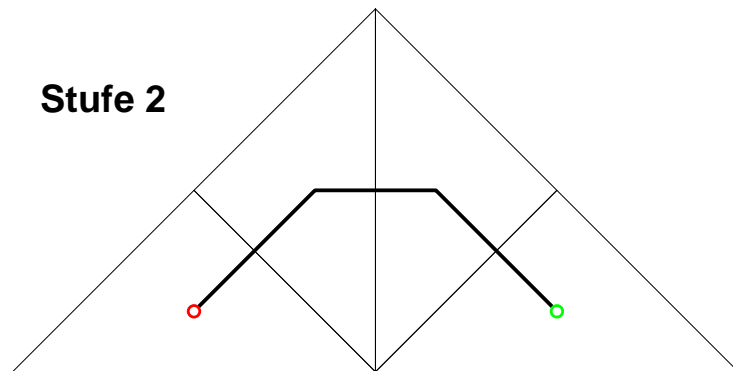
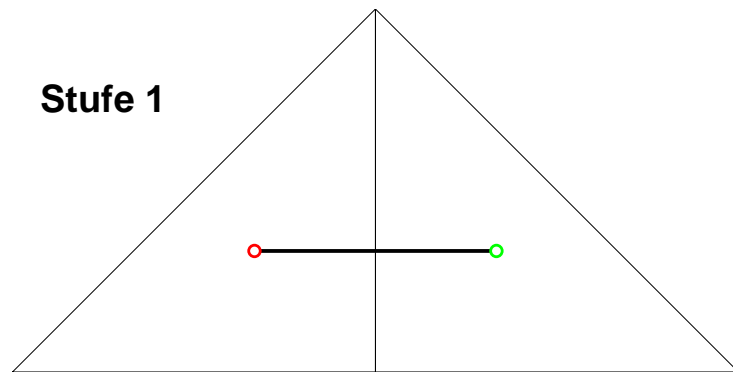


Abb. 2 Peano: Polygone der Stufen $n = 1, 2, 3, 4$

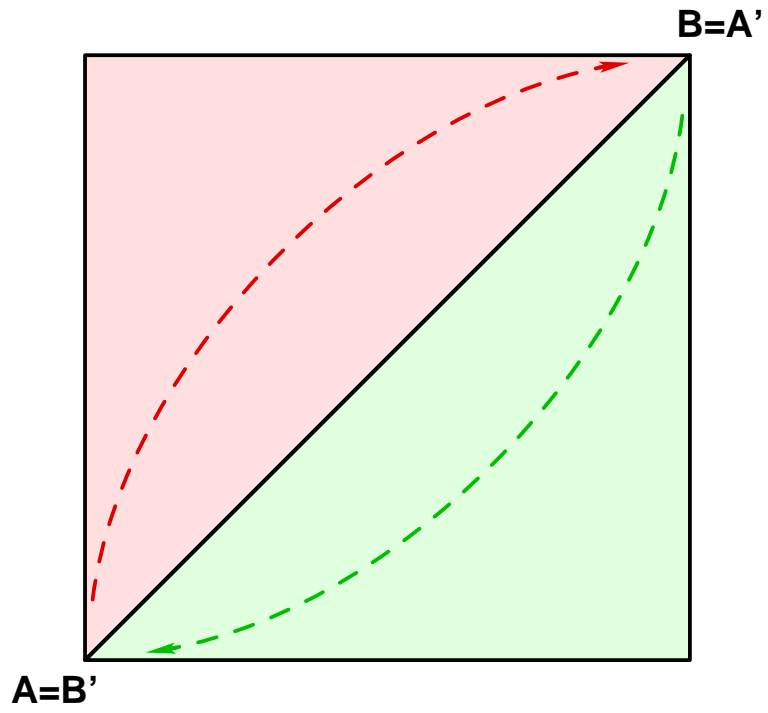


Abb.3 Zwei Dreiecke ergeben ein Quadrat

1	4
2	3

Stufe 1

1	2	15	16
4	3	14	13
5	8	9	12
6	7	10	11

Stufe 2

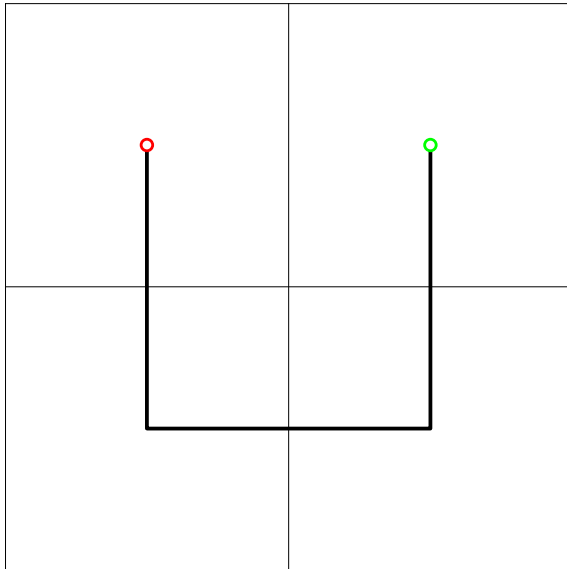
1	4	5	6	59	60	61	64
2	3	8	7	58	57	62	63
15	14	9	10	55	56	51	50
16	13	12	11	54	53	52	49
17	18	31	32	33	34	47	48
20	19	30	29	36	35	46	45
21	24	25	28	37	40	41	44
22	23	26	27	38	39	42	43

Stufe 3

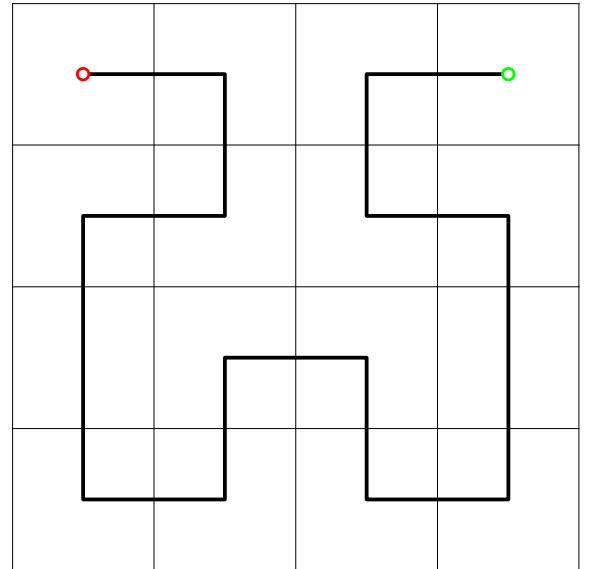
1	2	15	16	17	20	21	22	235	236	237	240	241	242	255	256
4	3	14	13	18	19	24	23	234	233	238	239	244	243	254	253
5	8	9	12	31	30	25	26	231	232	227	226	245	248	249	252
6	7	10	11	32	29	28	27	230	229	228	225	246	247	250	251
59	58	55	54	33	36	37	38	219	220	221	224	203	202	199	198
60	57	56	53	34	35	40	39	218	217	222	223	204	201	200	197
61	62	51	52	47	46	41	42	215	216	211	210	205	206	195	196
64	63	50	49	48	45	44	43	214	213	212	209	208	207	194	193
65	68	69	70	123	124	125	128	129	132	133	134	187	188	189	192
66	67	72	71	122	121	126	127	130	131	136	135	186	185	190	191
79	78	73	74	119	120	115	114	143	142	137	138	183	184	179	178
80	77	76	75	118	117	116	113	144	141	140	139	182	181	180	177
81	82	95	96	97	98	111	112	145	146	159	160	161	162	175	176
84	83	94	93	100	99	110	109	148	147	158	157	164	163	174	173
85	88	89	92	101	104	105	108	149	152	153	156	165	168	169	172
86	87	90	91	102	103	106	107	150	151	154	155	166	167	170	171

Stufe 4

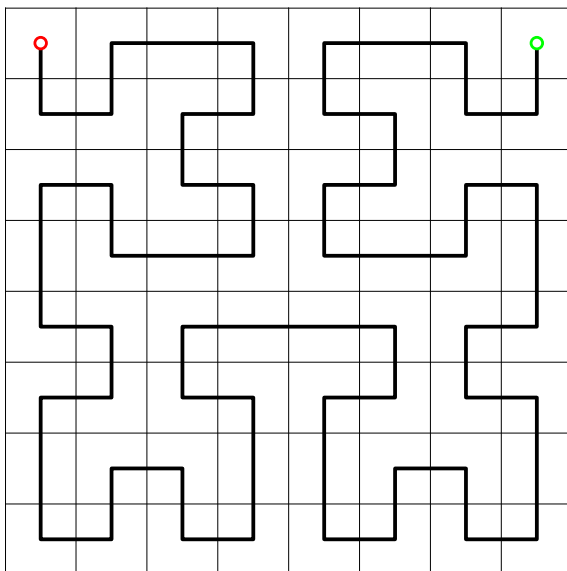
Abb. 4 Hilbert: Fortlaufende Nummerierung der Quadrate



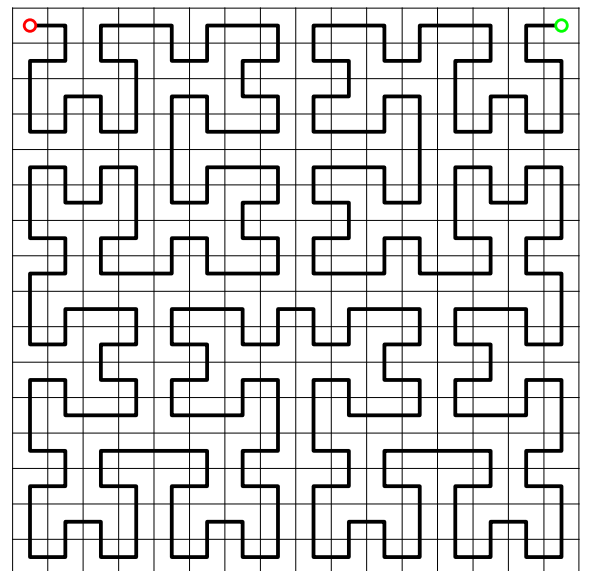
Ordnung 1



Ordnung 2



Ordnung 3



Ordnung 4

Abb. 5 Hilbert: Polygone der Stufen $n = 1, 2, 3, 4$

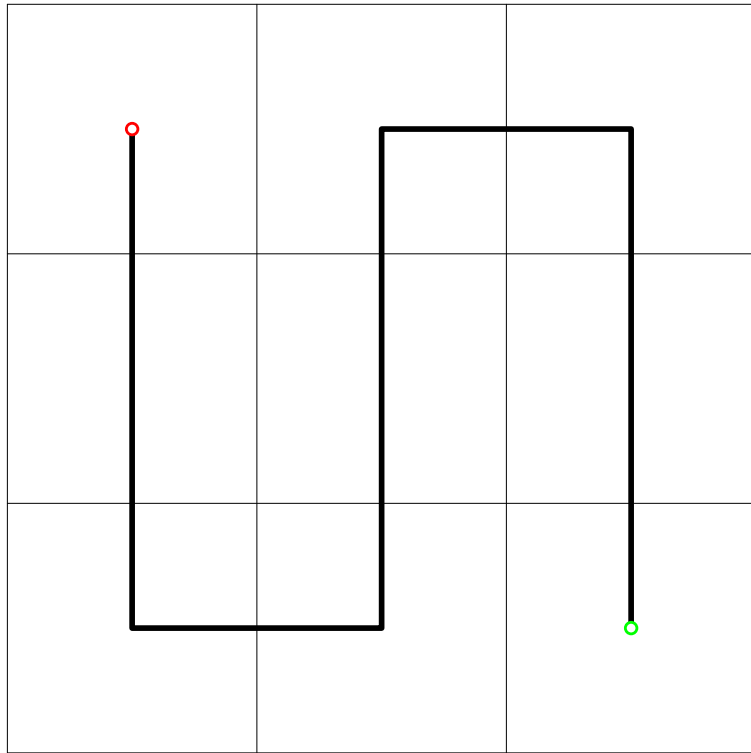


Abb. 6 Durchlaufsinne bei Trisektion in x - und y -Richtung