Konstruktion des isoperimetrischen Punktes

C. und M. Reinsch

Dreieck in der komplexen Ebene

Ecken: $A,\ B,\ C.$

Seiten: $a = |B - C|, \quad b = |C - A|, \quad c = |A - B|.$

Kreise: $A(u)$ um A mit Radius u,
$B(v)$ um B mit Radius v,
$C(w)$ um C mit Radius w.

Diese drei Kreise berühren sich ("*Kissing Coins*"), wenn

$$a = v + w, \quad b = w + u, \quad c = u + v, \qquad \Longleftrightarrow \tag{1}$$

$$u = (-a + b + c)/2, \quad v = (a - b + c)/2, \quad w = (a + b - c)/2. \tag{2}$$

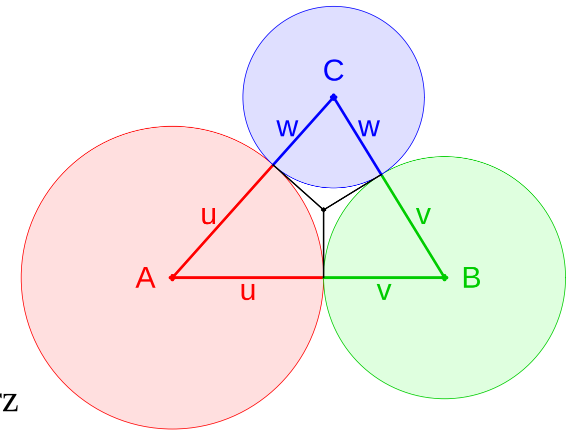

Fig. 1
u = 5, v = 4, w = 3
Inkreis-Radien schwarz

u, v, w sind immer positiv wegen der Dreiecks-Ungleichungen $a < b + c$ usw. Sie lassen sich leicht mit Zirkel und Lineal konstruieren. Sie markieren die drei Punkte, an denen der Inkreis das Dreieck berührt. Man kann $u, v, w > 0$ als die drei frei wählbaren Parameter ansehen, welche die Dreiecks-Geometrie festlegen. (1) und (2) geben die Umrechnung auf die drei Seitenlängen a, b, c und der Cosinus-Satz $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$ gibt die zugehörigen Winkel α, β, γ an den Ecken A, B, C:

$$\cos(\alpha) \;=\; (su - vw)/(su + vw), \qquad s := u + v + w,$$

$$\tan(\alpha/2) = \sqrt{vw/su}, \quad \tan(\beta/2) = \sqrt{wu/sv}, \quad \tan(\gamma/2) = \sqrt{uv/sw}. \tag{3}$$

Für den Inkreis-Radius folgt $\rho = u\tan(\alpha/2) = v\tan(\beta/2) = w\tan(\gamma/2) = \sqrt{u\,v\,w/s}$ und für den Flächeninhalt $F = s\,\rho = \sqrt{s\,u\,v\,w}$, (die Heronsche Formel).

Der isoperimetrische Punkt

Ein Punkt P innerhalb oder ausserhalb des Dreiecks ABC heißt *isoperimetrisch*, wenn die drei Dreiecke ABP, BCP, CAP gleichen Umfang (Perimeter) besitzen, d.h. wenn mit den Abständen

$$a' := |A - P|, \quad b' := |B - P|, \quad c' := |C - P|$$

gilt

$$a' + b' + c = b' + c' + a = c' + a' + b.$$

Oder wegen (1)

$$a' + u = b' + v = c' + w.$$

Der Kreis um P mit diesem Radius berührt also die drei Kreise $A(u), B(v), C(w)$ von außen. Er heißt *"äußerer Soddy-Kreis"*. Die Konstruktion des isoperimetrischen Punktes ist somit gleichbedeutend mit der Konstruktion des äußeren Soddy-Kreises.

Übrigens gibt es auch einen *"inneren Soddy-Kreis"*, der die drei Kreise $A(u), B(v), C(w)$ von innen berührt. Innerer und äußerer Soddy-Kreis sind immer eindeutig, aber nur der innere existiert immer.

Inversion als Hilfsmittel

Apollonios von Perge (zweite Hälfte des dritten Jahrhunderts vor Christus) hat als erster das Problem gestellt und gelöst, einen Kreis zu finden, der drei gegebene Kreise von innen oder von außen berührt. Er verwendete als Hilfsmittel die Inversion (am Einheitskreis), also die Transformation $\zeta = 1/z$, oder in der Geometrie vorzugsweise

$$\zeta = 1/\bar{z} = z/|z|^2, \qquad \xi = x/(x^2 + y^2), \quad \eta = y/(x^2 + y^2). \tag{4}$$

Das bildet die vier Quadranten und jeden Halbstrahl aus dem Ursprung in sich ab, und vereinfacht das Arbeiten mit Zirkel und Lineal. Figur 2 zeigt die Konstruktion von $1/\bar{z}$ zu gegebenem z, wenn $|z| > 1$. Für $|z| < 1$ muss man die Rolle von z und $1/\bar{z}$ vertauschen.

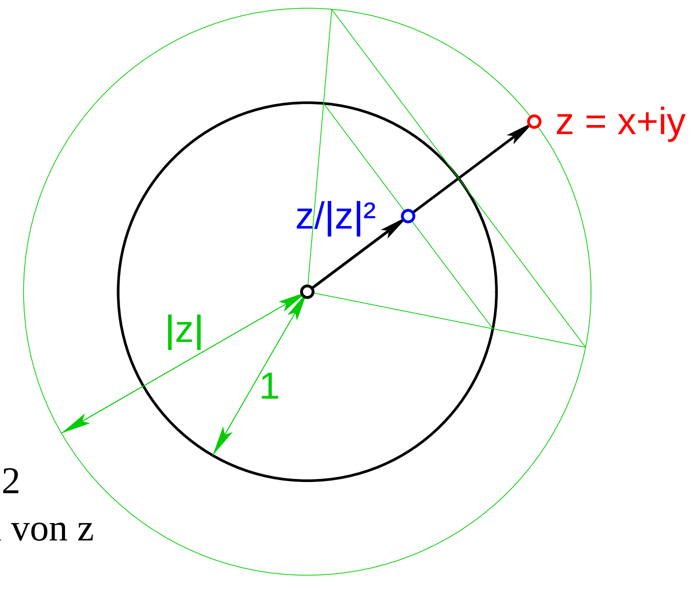

Fig. 2
Inversion von z

Figur 3 zeigt eine andere Konstruktion; man kann sie auf $Re(z)$ oder $Im(z)$ oder $|z|$ anwenden mit $s = |z|$ und $R = 1$. (Die Richtung $arg(z)$ bleibt bei der Transformation (4) unverändert.)

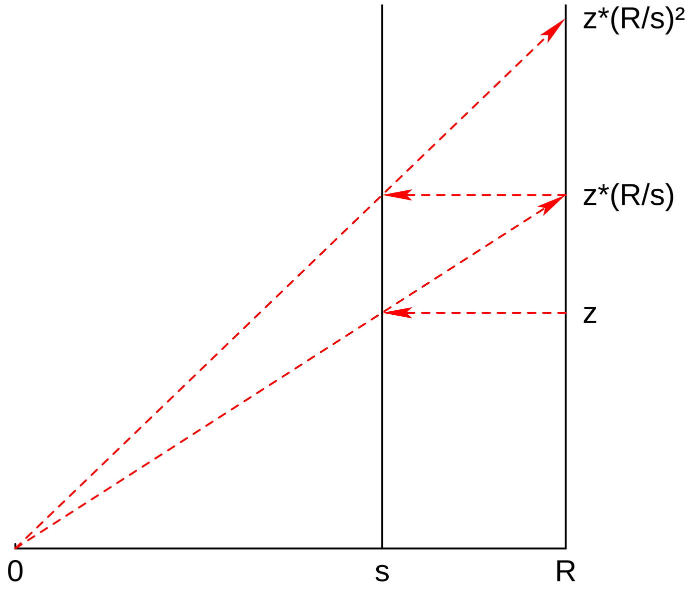

Fig. 3 Von z zu $z*R^2/s^2$

Für die Inversion (4) gilt

$$(x^2 + y^2)(\xi^2 + \eta^2) = 1$$

und die Rücktransformation ist identisch: $z = 1/\bar{\zeta}$. Kreise werden in Kreise abgebildet, wobei man allerdings die Geraden als degenerierte Kreise (Radius ∞) mit einschließen muss. In der Tat gilt

$$(x^2 + y^2)\,A + 2\,x\,B + 2\,y\,C + D = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\xi^2 + \eta^2)\,D + 2\,\xi\,B + 2\,\eta\,C + A = 0.$$

Kreise durch den Nullpunkt ($D = 0$) geben Gerade und umgekehrt ($A = 0$).

Für Kreis-Mittelpunkte $p + iq$ und -Radien r gilt

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (\xi - p/f)^2 + (\eta - q/f)^2 = (r/f)^2,$$

wobei $f := p^2 + q^2 - r^2$. Dieser Skalenfaktor f ist negativ genau dann, wenn $p^2 + q^2 < r^2$, wenn also der Nullpunkt innerhalb des Kreises ist. Die Inversion (4) vertauscht Inneres und Äußeres solcher Kreise.

Für die Konstruktion der Inversion eines Kreises genügt es, seinen Nah- und Fernpunkt ($x^2 + y^2 =$ Min! bzw. Max!) abzubilden, welche den Fern- und Nahpunkt des Bildkreises ergeben ($\xi^2 + \eta^2 =$ Max! bzw. Min!). Alle vier Punkte wie auch die beiden Mittelpunkte liegen auf einer Geraden durch den Nullpunkt.

Apollonios legt das Inversions-Zentrum (= Nullpunkt) in den Berührpunkt der beiden Kreise $A(u)$ und $B(v)$. Dann transformiert die Inversion (4) Figur 1 in Figur 4.

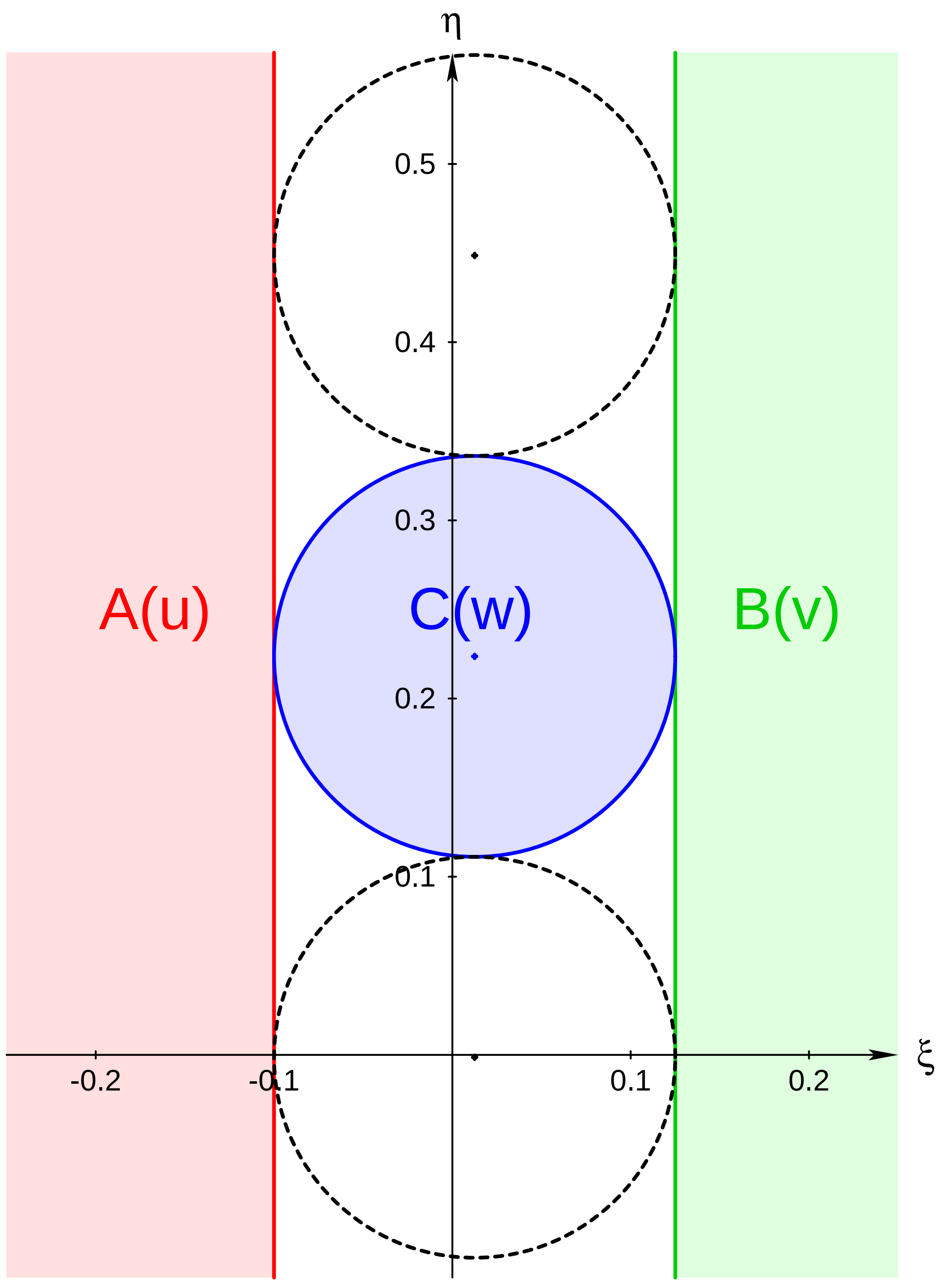

Fig.4 Inversion von Fig.1

Das Innere von Kreis $A(u)$ wird abgebildet nach $Re(\zeta) < -1/2u$. Das Innere von Kreis $B(v)$ wird abgebildet nach $Re(\zeta) > +1/2v$. Das Innere von Kreis $C(w)$ in der strikt oberen z-Halbebene wird abgebildet in das Innere eines Kreises in der strikt oberen ζ-Halbebene. Diese drei Bilder berühren sich ebenso wie ihre Urbilder in der z-Ebene.

In die Figur 4 schwarz und gestrichelt eingezeichnet sind auch die zwei Kandidaten für den inneren und äußeren Soddy-Kreis, wie sie einem jetzt in die Augen springen.

Der *obere Kreis* liegt mit Sicherheit in der strikt oberen ζ-Halbebene. Er kann also den Nullpunkt nicht enthalten, so dass bei der Rücktransformation Inneres in Inneres übergeht: das Innere hat vor und nach der Rücktransformation keinen Punkt gemeinsam mit den drei Kreisen $A(u), B(v), C(w)$. Man erhält dabei also den inneren Soddy-Kreis, der somit immer existiert und eindeutig ist.

Der *untere Kreis* kann wie in dem gewählten Beispiel den Nullpunkt enthalten. Dann vertauschen sich bei der Rücktransformation sein Äußeres mit dem Inneren. In diesem Fall überdeckt nach der Rücktransformation das Innere die Kreise $A(u), B(v), C(w)$. Man erhält dabei also den äußeren Soddy-Kreis. Wenn er existiert, dann ist er eindeutig.

Die Existenz-Bedingung

Die Bedingung für die Existenz des äußeren Soddy-Kreises und seines Mittelpunktes, dem isoperimetrischen Punkt P, ist also, dass der Ursprung im Inneren des *unteren Kreises* liegt. Diese geometrische Form der Existenz-Bedingung soll jetzt noch in eine analytische Form gebracht werden. Entsprechend der Figur 1 setzen wir dazu an:

$$A = (-u, 0), \qquad B = (+v, 0), \qquad C = (p, q).$$

Aus $|A - C| = u + w$ und $|B - C| = v + w$ ergibt sich für den Mittelpunkt von $C(w)$

$$p = \frac{u - v}{u + v}\, w, \qquad q = 2\, \frac{\sqrt{u\,v\,w\,(u + v + w)}}{u + v}.$$

Der Skalenfaktor für die Inversion ist

$$f = p^2 + q^2 - w^2 = \frac{4\,u\,v\,w}{u + v}.$$

Somit hat das Bild von $C(w)$ den Mittelpunkt

$$p' \;=\; \frac{p}{f} \;=\; \frac{u - v}{4\,u\,v}\,, \qquad q' \;=\; \frac{q}{f} \;=\; \sqrt{\frac{u + v + w}{4\,u\,v\,w}}$$

und den Radius

$$r' \;=\; \frac{w}{f} \;=\; \frac{u + v}{4\,u\,v}\,.$$

Die gesuchte Existenz-Bedingung, nämlich $(p')^2 + (q' - 2r')^2 \;<\; (r')^2$ bzw. $(q' - 2r')^2 \;<\; (r' - p')(r' + p')$ ist daher

$$\left(\sqrt{\frac{u + v + w}{u\,v\,w}} - \frac{u + v}{u\,v}\right)^2 \;<\; \frac{1}{u\,v} \tag{5}$$

oder ausquadriert

$$2\,\sqrt{\frac{u + v + w}{u\,v\,w}} \;>\; \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}. \tag{6}$$

Sie ist symmetrisch in u, v, w, also auch in a, b, c. Mit (3) kann man diese Existenz-Bedingung auch in den Winkeln ausdrücken:

> *Der isoperimetrische Punkt zu einem Dreieck mit den Winkeln* α, β, γ *existiert genau dann, wenn* $\tan(\alpha/2) + \tan(\beta/2) + \tan(\gamma/2) \;<\; 2.$

Die drei Tangens sind nicht unabhängig, denn aus der Winkelsumme $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ folgt $\tan(\alpha/2)\tan(\beta/2) \;+\; \tan(\beta/2)\tan(\gamma/2) \;+\; \tan(\gamma/2)\tan(\alpha/2) \;=\; 1.$

(5) läßt sich auch in die Form bringen

$$-1 \;<\; \sqrt{\frac{u+v}{w}+1}-\frac{u+v}{\sqrt{u\,v}} \;<\; +1.$$

Aufgelöst nach w also $|1/\sqrt{u}-1/\sqrt{v}| \;<\; 1/\sqrt{w} \;<\; 1/\sqrt{u}+1/\sqrt{v}.$

Bei der Wahl $a \le b \le c$ bzw. $u \ge v \ge w$ ist die linke Ungleichung immer erfüllt und es bleibt nur der rechte Teil $1/\sqrt{w} \;<\; 1/\sqrt{u}+1/\sqrt{v}.$

Gilt umgekehrt $a \ge b \ge c$ bzw. $u \le v \le w$, dann ist die rechte Ungleichung immer erfüllt und es bleibt nur der linke Teil $1/\sqrt{u} \;<\; 1/\sqrt{v}+1/\sqrt{w}$. Also gilt auch

> *Der isoperimetrische Punkt zu einem Dreieck mit den Seiten $a \le b \le c$ existiert genau dann, wenn*
>
> $$1/\sqrt{s-c} \;<\; 1/\sqrt{s-a} \;+\; 1/\sqrt{s-b}, \qquad s := (a+b+c)/2.$$

($a \le b \le c$ ist keine Einschränkung, sondern legt nur die Benennung der drei Seiten fest.)

Der Grenzfall ergibt sich wenn $1/\sqrt{w} = 1/\sqrt{u}+1/\sqrt{v}$ bzw. $(\sqrt{u/w}-1)(\sqrt{v/w}-1)=1.$ Nennt man die beiden Faktoren auf der linken Seite t und $1/t$, so gilt also im Grenzfall $u/w=(1+t)^2, \quad v/w=(1+1/t)^2, \quad \forall\, t>0$. Mit (3) ergibt sich für die Winkel

$$\tan(\alpha/2)=1/(t\,d), \quad \tan(\beta/2)=t/d, \quad \tan(\gamma/2)=(d+1)/d, \quad d:=1+t+1/t \ge 3.$$

Entlang der Grenzkurve ist der größte Winkel im Dreieck zwischen 90 und 106.28 Grad: *alle spitz- und rechtwinkligen Dreiecke haben einen isoperimetrischen Punkt.*

Die expliziten Formeln für die Koordinaten des isoperimetrischen Punktes ergeben sich aus der Rücktransformation von p' und $q'-2r'$ (Mittelpunkt des *unteren Kreises*):

$$x=p'/f', \qquad y=(q'-2r')/f',$$

wobei

$$f' \;:=\; p'^{\,2}+(q'-2r')^2-r'^{\,2} \;=\; \left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}-2\sqrt{\frac{u+v+w}{u\,v\,w}}\right)\; r'.$$

Der Radius des äußeren Soddy-Kreises ist dementsprechend

$$|r'/f'| \;=\; \left|u^{-1}+v^{-1}+w^{-1}-2\sqrt{(u+v+w)/(uvw)}\right|^{-1}.$$

Für den inneren Soddy-Kreis, die Rücktransformation des *oberen Kreises*, gelten entsprechende Formeln, nämlich Skalenfaktor

$$f'' \;:=\; p'^{\,2}+(q'+2r')^2-r'^{\,2} \;=\; \left(u^{-1}+v^{-1}+w^{-1}+2\sqrt{(u+v+w)/(uvw)}\right)\; r'.$$

Mittelpunkt $\quad x=p'/f'', \quad y=(q'+2r')/f'',$

Radius $\quad r'/f'' = \left(u^{-1}+v^{-1}+w^{-1}+2\sqrt{(u+v+w)/(uvw)}\right)^{-1}.$

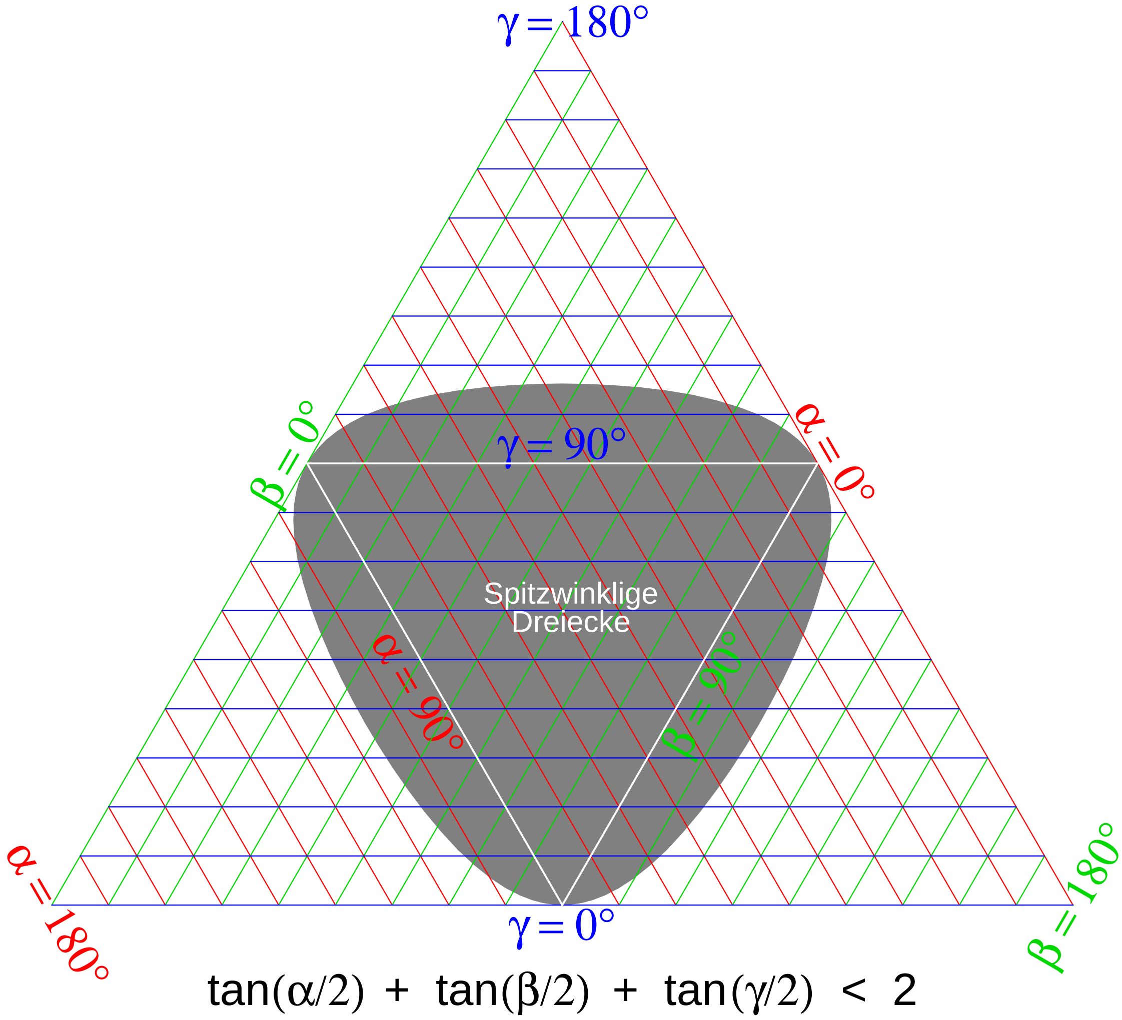

Abb. 5 Existenz des isoperimetrischen Punktes als Funktion der drei Winkel α, β, γ

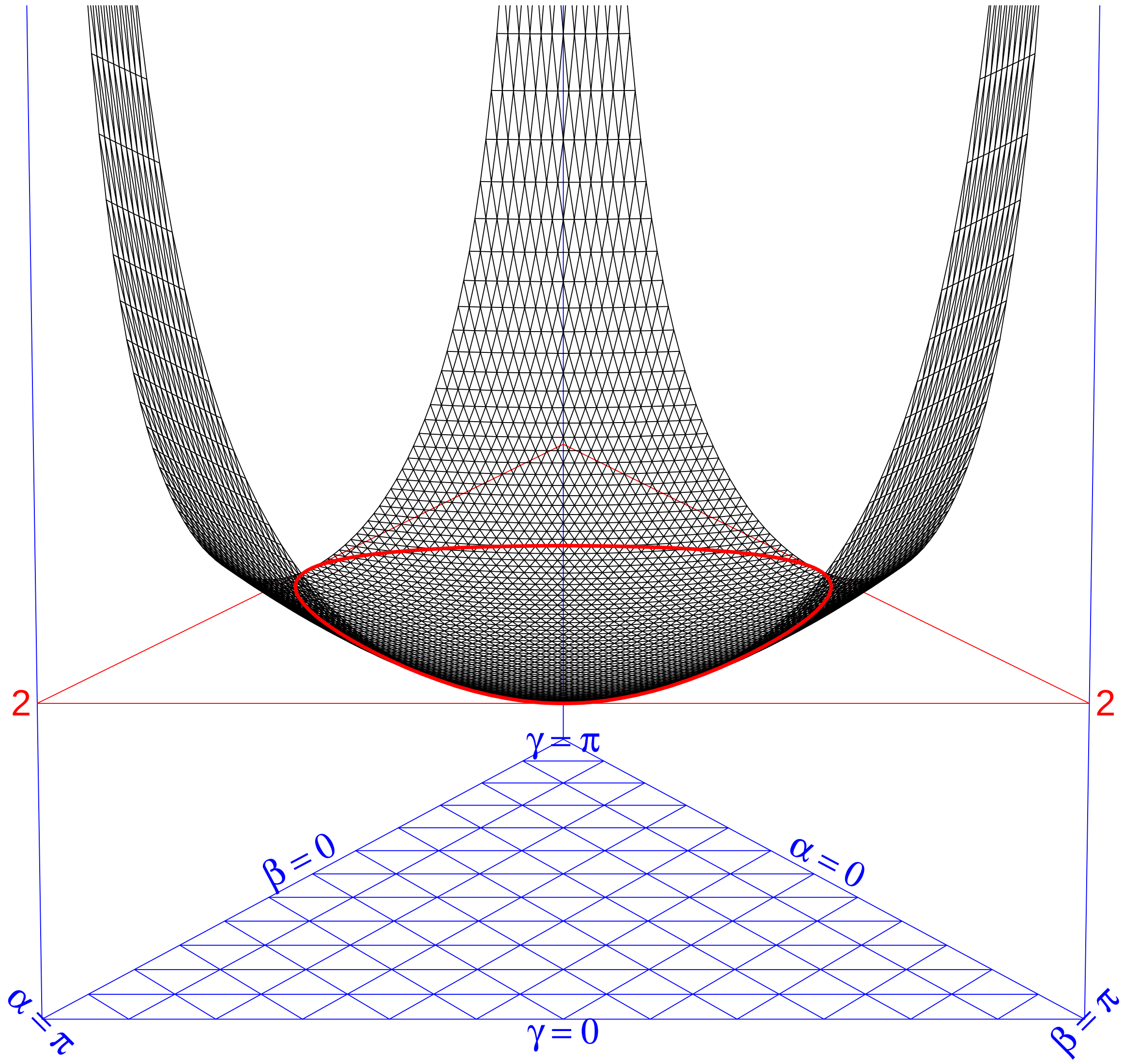

Abb. 6 Die Funktion $z = \tan(\alpha/2) + \tan(\beta/2) + \tan(\gamma/2)$ mit $\alpha + \beta + \gamma = \pi$
über dem gleichseitigen Dreieck $x = \beta - \alpha$, $y = \gamma\sqrt{3}$ in Zentralprojektion

α	β	γ	x	y
π	0	0	$-\pi$	0
0	π	0	$+\pi$	0
0	0	π	0	$\pi\sqrt{3}$