PROF. DR. BERND SIMEON
CHRISTIAN GOBERT
THOMAS MÄRZ

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Numerik

SS 2009

Programmieraufgabe 2

Testaterteilung: 15. oder 16.Juli

Aufgabe 1: *Hamilton-Systeme und Himmelsmechanik (optional)*

Eine Möglichkeit der Beschreibung von allgemeinen mechanischen Systemen erfolgt über die Lagrange-Funktion $L = T - U$, also der Differenz aus kinetischer Energie T und potenzieller Energie U. Sind in einer Variablen q die verallgemeinerten Koordinaten (also kartesische, polare, Bogenlängen, o.ä.) gespeichert, so gilt die *Lagrange-Gleichung* (a. 1760)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q},$$

wobei $L = L(q, \dot{q})$ ist. Aus ihr lassen sich die Bewegungsgleichungen ableiten.
Hamilton verallgemeinerte 1834 in seiner Gleichung die Idee einer Systeminvarianten, zum Beispiel der totalen Energie. Ein *Hamilton-System* wird beschrieben durch die *Hamilton-Funktion* $H(p, q) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und die zugehörigen Differenzialgleichungen

$$\dot{p} = -\frac{\partial}{\partial q}H(p, q), \quad \dot{q} = \frac{\partial}{\partial p}H(p, q),$$

wobei in p die Momente/Impulse und in q die verallgemeinerte Koordinaten gespeichert sind.

a) Man zeige, dass die Hamilton-Funktion tatsächlich eine Systeminvariante ist.

b) Zu einer Lagrange-Funktion L definiere man $H(p, q) = p^T\dot{q} - L(q, \dot{q})$. Zeigen Sie, dass H eine Hamilton-Funktion ist.

   Hinweis: Setzen Sie $p := \partial L(q, \dot{q})/\partial \dot{q}$ und treffen Sie geeignete Annahmen, so dass sich $\dot{q}$ als Funktion von p und q ausdrücken lässt.

c) Die Bewegung zweier sich anziehender Massen (zum Beispiel Sonne $\leftrightarrow$ Mars) in einer Ebene lässt sich mit den Newton-Gesetzen

$$\ddot{q}_1 = -\frac{q_1}{(q_1^2 + q_2^2)^{3/2}}, \quad \ddot{q}_2 = -\frac{q_2}{(q_1^2 + q_2^2)^{3/2}},$$

   beschreiben, wobei der Körper 1 im Koordinatenursprung liege und der Körper 2 die Koordinaten (q_1, q_2) habe. Leiten Sie aus den Newton-Gesetzen die zugehörige Hamilton-Funktion für dieses Zwei-Körper-Problem ab. *Hinweis*: $p_i = \dot{q}_i$ bei Normierung $m_1 = m_2 = 1$.

Aufgabe 2: *Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahren*
Gegeben sei das folgende Butcher-Tableau:

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
1/4 & 1/4 & & & \\
27/40 & -189/800 & 729/800 & & \\
1 & 214/891 & 1/33 & 650/891 & \\
\hline
 & 214/891 & 1/33 & 650/891 & 0 \\
\hline
 & \hat{b}_1 & \hat{b}_2 & \hat{b}_3 & \hat{b}_4
\end{array}$$

a) Implementieren Sie den Algorithmus zu obigen Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahren in Matlab mit $b = (214/891, 1/33, 650/891, 0)$ ohne Schrittweitensteuerung, d.h. der Benutzer gibt die Schrittweite vor.

   Der Programmkopf soll lauten:

```
function [yout,tout,stat]=explizitrkfix(ydot,I,y0,dt)
% ydot(t,y), y0=y(ta),dt  : Ableitungsfunktion, Anfangswert, Schrittweite
% I=[ta te]  : Integrationsintervall
% yout(i,:)  : Loesung zum Zeitpunkt tout(i)
% stat       : Anzahl durchgefuehrter Schritte
```

   Welche Ordnung hat das Verfahren?

b) Bestimmen Sie die Koeffizienten $\hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_4$ so, dass Sie ein eingebettetes Verfahren 3. Ordnung erhalten ($\hat{b}_2 := 0$).

c) Erweitern Sie Ihren Algorithmus um eine Schrittweitensteuerung. Gehen Sie analog zu Algorithmus 3.1 aus der Vorlesung vor. Benutzen Sie die auf Seite 84 im Skript angegebene Fehlerschranke ERR. Diskutieren Sie die Wahl der Parameter α, β und ρ.

   Der Programmkopf soll lauten:

```
function [yout,tout,stat]=explizitrkvar(ydot,I,y0,dt)
% dt  : initiale Schrittweite
% stat       : [Anzahl durchgefuehrter Schritte,Anzahl verworfener Schritte]
% alle anderen Argumente wie in explizitrkfix
```

d) Testen Sie Ihr Programm an eigenen Beispielen, unter anderem an der Van-der-Pol-Gleichung in der Formulierung (3.9) aus dem Skript.

e) Auf der Vorlesungshomepage finden Sie die Herleitung der Hamilton-Funktion für N Planeten, die – in relativ großem Abstand – um eine Sonne kreisen. Berechnen Sie die Keplerbahnen von 5 Planeten und werten Sie anschließend ihre Hamiltonfunktion zu jedem berechneten Zeitpunkt aus. Bleibt sie konstant? (Anfangswerte siehe Vorlesungshomepage).

Bitte bearbeiten Sie das Blatt in Gruppen zu dritt. Zur Testaterteilung vereinbaren Sie bitte einen Termin mit Ihrem Tutor. Der Termin soll entweder am 15. oder 16. Juli stattfinden. An dem Termin müssen alle drei Gruppenmitglieder teilnehmen.