PROF. DR. BERND SIMEON
CHRISTIAN GOBERT
THOMAS MÄRZ

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Numerik

SS 2009

Probeklausur

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Aufgabe 1: (12 Punkte)

Für $f \in C^\infty[0,h]$ wird das Integral $I(f) = \int_0^h f(x)\,dx$ durch die Quadraturformel

$$J(f) = hf(h/2)$$

approximiert.

(a) Bestimmen Sie die Ordnung p von J. (Begründen Sie, warum die Ordnung nicht größer als Ihr angegebenes p sein kann.)

(b) Der Approximationsfehler $E_J(h) = I(f) - J(f)$ hat die Form

$$E_J(h) = cf^{(p)}(\xi)h^{p+1}$$

mit $\xi \in (0,h)$. Begründen Sie diese Form und bestimmen Sie c.
Hinweis: Taylorentwicklung von f an geeignetem Punkt!

(c) Geben Sie zur Approximation von $\hat{I}(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$ diejenige summatorische Quadraturformel S an, welche J als Basisverfahren benutzt. Leiten Sie die dazugehörige Abschätzung des Approximationsfehler

$$E_S(h) := |\hat{I}(f) - S(f)| \leq ?$$

her.

Lösung Aufgabe 1:

(a) 3P. Ein Weg ist die Standardbasis der Polynome $\{1, x, x^2, \ldots\}$ zu testen. Hier haben wir

$$I(1) = h \qquad J(1) = h \;\boxed{1\text{ P.}}$$

$$I(x) = \frac{h^2}{2} \qquad J(x) = \frac{h^2}{2} \;\boxed{1\text{ P.}}$$

$$I(x^2) = \frac{h^3}{3} \qquad J(x^2) = \frac{h^3}{4} \;\boxed{1\text{ P.}}$$

Nachdem Polynome maximal 1-ten Grades von J exakt integriert werden, hat J die Ordnung $p = 2$.

(b) 5P. Taylorentwicklung um den Punkt $h/2$ liefert

$$f(x) = q(x) + r(x) \quad \text{mit} \quad q(x) = f(h/2) + f'(h/2)(x - h/2)\,,\; r(x) = \frac{f''(\tilde{\xi})}{2}(x - h/2)^2\,.$$

$\boxed{\text{1 P. Taylorentwicklung}}$ + $\boxed{\text{1 P. exakter Abbruchterm (nicht O(...))}}$ Die Anwendung von J auf diese Darstellung liefert

$$J(f) = J(q) + 0 = I(q)\;, \boxed{\text{1 P. für J(r)=0}}$$

letzte Gleichheit gilt wegen a), denn q hat Grad 1. $\boxed{\text{1 P.}}$
Die Anwendung von I auf die Taylorentwicklung liefert

$$I(f) = I(q) + I(r)$$

also folgt $E_J(h) = I(r)$. Weil $(x - h/2)^2$ nicht negativ ist, ist der Mittelwertsatz der Integralrechnung anwendbar und es folgt

$$I(r) = \int_0^h \frac{f''(\tilde{\xi})}{2}(x - h/2)^2\,dx = \frac{f''(\xi)}{2}\int_0^h (x - h/2)^2\,dx = f''(\xi)\frac{h^3}{24}\,. \boxed{\text{1 P.}}$$

(c) 4P. Das Intervall $[0,1]$ wird in gleichlange Teilintervalle zerlegt der Länge $h = 1/n$, dann lautet S:

$$S(f) = h\sum_{k=0}^{n-1} f((k + 1/2)h)\,. \boxed{\text{1 P.}}$$

Für $\hat{I}(f)$ schreibt man

$$\hat{I}(f) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{kh}^{k(h+1)} f(x)\,dx\;,$$

somit gilt

$$\hat{I}(f) - S(f) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{kh}^{k(h+1)} f(x)\,dx - f((k + 1/2)h)h\right) \boxed{\text{1 P.}}$$

und b) liefert

$$\hat{I}(f) - S(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k)\frac{h^3}{24} = \frac{h^2}{24}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k)\right)\,. \boxed{\text{1 P.}}$$

Also

$$E_S(h) := |\hat{I}(f) - S(f)| \le \frac{h^2}{24}\|f''\|_\infty\,. \boxed{\text{1 P.}}$$

Aufgabe 2: (16 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische positiv definite Matrix mit den Eigenwerten

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n\,.$$

Wir betrachten folgenden Algorithmus (simultane Iteration):

Eingabe: A, Q_0
Iteriere: $k = 1, 2, \dots$
$W_k = AQ_{k-1}$
bestimme: $W_k = Q_k R_k$

Dabei sind die Q_k ($k = 0, 1, \dots$) $n \times 2$ Matrizen mit orthonormalen Spalten und $W_k = Q_k R_k$ die reduzierte QR-Zerlegung von W_k.

a) Welchen Algorithmus durchläuft die 1. Spalte $Q_k(:, 1)$ effektiv ? Begründen Sie, unter welchen Voraussetzungen an $Q_0(:, 1)$ die 1. Spalte $Q_k(:, 1)$ gegen einen normierten Eigenvektor q_1 zum Eigenwert λ_1 von A konvergiert.

Im Folgenden darf angenommen werden, dass bereits $Q_0(:, 1) = q_1$ gilt.

b) Angenommen, die 2. Spalte $Q_k(:, 2)$ konvergiert gegen einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$. Wieso muss x senkrecht auf q_1 stehen?

c) Begründen Sie, unter welchen Voraussetzungen an $Q_0(:, 2)$ die 2. Spalte $Q_k(:, 2)$ gegen den normierten Eigenvektor q_2 zum Eigenwert λ_2 von A konvergiert.

Lösung Aufgabe 2:

Wir legen für die gesamte Aufgabe folgende Spaltenvektoren fest

$$Q_k = [v_k|\hat{v}_k] \quad \text{und} \quad W_k = [w_k|\hat{w}_k] \ .$$

Außerdem bezeichne $A = Q \operatorname{diag}(\lambda_i)_{i=1}^n Q^T$ die Schurform von A mit

$$Q = [q_1| \dots |q_n] \ .$$

a) Betrachten wir was im Algorithmus für die erste Spalte passiert, so hat man in der ersten Anweisung $w_k = Av_{k-1}$ $\boxed{\text{1 P.}}$. Nachdem R_k eine obere Dreiecksmatrix ist, haben wir in der zweiten Anweisung $w_k = R_{1,1} v_k$ $\boxed{\text{1 P.}}$. Außerdem sind die Spalten von Q_k orthonormal also gilt $\|w_k\|_2 = |R(1, 1)|$ und die Extraktion von v_k (es wird ja mit Q_k weiteriteriert) ist äquivalent zu einer Normierungsanweisung $v_k = w_k / \|w_k\|_2$ $\boxed{\text{1 P.}}$. Also durchläuft v_k die Vektoriteration $\boxed{\text{1 P.}}$. Bei unseren Voraussetzungen konvergiert sie sicher gegen q_1, wenn initial $v_0^T q_1 \neq 0$ gilt $\boxed{\text{1 P.}}$.

b) Nehmen wir an, dass auch $\hat{v}_k$ konvergiert und zwar gegen x, dann gilt wegen der Stetigkeit des Skalarproduktes $\boxed{\text{1 P.}}$ Begründung Stetigkeit

$$q_1^T x = (\lim_{k\to\infty} v_k)^T (\lim_{k\to\infty} \hat{v}_k) = \lim_{k\to\infty} v_k^T \hat{v}_k = 0 \ \boxed{\text{1 P.}}$$

da Q_k orthonormale Spalten hat. Somit hat x keine Komponente in Richtung q_1, d.h.

$$x = \alpha_2 q_2 + \alpha_2 q_3 + \cdots \alpha_n q_n \ ,$$

insbesondere ist x normiert.

c) Unter der Vereinfachungsannahme $Q_0 = [q_1, \hat{v}_0]$ ist leicht zu sehen , dass gilt:

$$\hat{v}_k \in \text{span}\{A^k \hat{v}_0, q_1\} \ , \boxed{1 \text{ P.}}$$

denn $v_k = q_1$ für alle k.
Wir entwickeln erst den Startvektor für die zweite Spalte $\hat{v}_0$ bzgl. der Eigenbasis

$$\hat{v}_0 = \beta_1 q_1 + \beta_2 q_2 + \beta_3 q_3 + \cdots + \beta_n q_n \ . \boxed{1 \text{ P.}}$$

Wir erhalten dann

$$\hat{v}_k = g_k A^k \hat{v}_0 + h_k q_1 = (g_k \beta_1 \lambda_1^k + h_k) q_1 + g_k (\beta_2 \lambda_2^k q_2 + \beta_3 \lambda_3^k q_3 + \cdots + \beta_n \lambda_n^k q_n) \ . \boxed{1 \text{ P.}}$$

mit Skalaren h_k, g_k.

Außerdem haben wir vorausgesetzt, dass $\hat{v}_k$ gegen x konvergiert, deswegen ist nur wichtig was in dem Unterraum passiert, in welchem x liegt, denn alles was evtl. (noch) orthogonal dazu ist konvergiert gegen Null $\boxed{1 \text{ P.}}$. Also können wir die Komponente von $\hat{v}_k$ in Richtung q_1 wegprojezieren. $\boxed{1 \text{ P.}}$ Bezeichne P die Projektion auf den interessanten Teil $\text{span}\{q_2, \dots, q_n\}$, dann folgt

$$P(g_k A^k \hat{v}_0 + h_k q_1) = g_k (\beta_2 \lambda_2^k q_2 + \beta_3 \lambda_3^k q_3 + \cdots + \beta_n \lambda_n^k q_n) \ . \boxed{1 \text{ P.}}$$

Zieht man noch den ersten Vorfaktor raus gilt

$$P(g_k A^k \hat{v}_0 + h_k q_1) = g_k \beta_2 \lambda_2^k \left(q_2 + \frac{\beta_3}{\beta_2} \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right)^k q_3 + \cdots + \frac{\beta_n}{\beta_2} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_2} \right)^k q_n \right) \ . \boxed{1 \text{ P.}}$$

Wenn nun der Startvektor eine Komponente in Richtung q_2 hat, also $\hat{v}_0^T q_2 \neq 0$ $\boxed{1 \text{ P.}}$, so gilt diese Darstellung. Nach Voraussetzung an die Eigenwerte müssen dann die Komponenten in die Richtungen $q_3, \dots, q_n$ mindestens wie $\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^k$ gegen Null gehen $\boxed{1 \text{ P.}}$.

Aufgabe 3: (12 Punkte)

Bepunktung dieser Aufgabe:
Für jede der folgenden Multiple-Choice Fragen wird die richtige Lösung mit +2 Punkten bewertet, die falsche Lösung mit −2 Punkten und keine Antwort mit 0 Punkten. Die vergebenen positiven oder negativen Punkte werden zu einer Gesamtpunktzahl der Aufgabe summiert. Falls die Summe negativ ist wird die Aufgabe mit 0 Punkten bewertet. Die Gesamtpunktzahl der Aufgabe kann also nicht negativ werden.

Beantworten Sie die folgenden Fragen:

Eine Newton-Cotes-Formel mit n Stützstellen hat höchstens Ordnung n.	○ Ja ⊗ Nein
Jede konsistente Quadraturformel integriert lineare Funktionen exakt.	○ Ja ⊗ Nein
Adaptive Quadraturformeln liefern immer ein Ergebnis, dessen Fehler kleiner als die vorgegebene Toleranz ist.	○ Ja ⊗ Nein
Alle Eigenwerte einer Matrix A liegen in der Vereinigung der Gerschgorinkreise von A.	⊗ Ja ○ Nein
Bei exakter Arithmetik konvergiert die Vektoriteration für alle Startwerte gegen den Eigenvektor zum betragsgrößten Eigenwert.	○ Ja ⊗ Nein

Sei $H \in \mathbb{C}^{m \times m}$ obere Hessenberg-Matrix mit QR-Zerlegung $H = QR$. Dann ist RQ ebenfalls eine obere Hessenberg-Matrix. ◯ Ja ⊗ Nein

Diese Frage war eine Fangfrage:
Auf Übungsblatt 5 wurde gezeigt, dass es zu H eine QR-Zerlegung gibt, so dass RQ obere Hessenbergmatrix ist (Givensrotationen). Für Matrizen mit vollem Rang ist die QR-Zerlegung bis auf Vorzeichen in der Diagonalen eindeutig, d.h. für Matrizen mit vollem Rang lautet die Antwort „Ja“.
Falls H allerdings nicht vollen Rang hat, dann ist die QR-Zerlegung nicht eindeutig. Hier gibt es QR-Zerlegungen, so dass RQ **nicht** obere Heesenbergform hat, d.h. im Allgemeinen lautet die Antwort „Nein“. Beispiel dazu:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad RQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$