Prof. Dr. Bernd Simeon
Christian Gobert
Thomas März

Numerik

SS 2009

Lösungsvorschläge zu Übungsblatt 8

Aufgabe 1: *Expliziter Euler*

Gegeben sei das Anfangswertproblem $y' = -(1/y)\sqrt{1-y^2}, \quad y(0) = 1$.

a) Untersuchen Sie das Anfangswertproblem auf Existenz und Eindeutigkeit.

b) Berechnen Sie eine nichttriviale Lösung des Anfangswertproblems. Triviale Lösung: $y(x) \equiv 1$.

c) Berechnen Sie einen Schritt des Euler-Verfahrens für beliebige Schrittweite h. Was fällt Ihnen auf?

Lösung:

a) Das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{1}{y}\sqrt{1-y^2}, \quad y(0) = 1$$

ist stetig und beschränkt in einer Umgebung von $x = 0$, $y = 1$ und nach dem Peano Existenzsatz ist somit eine Lösung gesichert. Da aber keine Lipschitz-Bedingung vorliegt, können wir keine Eindeutigkeit erwarten.

b) Mit der Trennung der Veränderlichen erhalten wir

$$\begin{aligned}
& -\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy &=& \int 1\,dx \\
\overset{z=1-y^2}{\Leftrightarrow} \quad & \int \frac{dz}{2\sqrt{z}} &=& x + c \\
\Leftrightarrow \quad & z^{1/2} &=& x + c \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{1-y^2} &=& x + c \\
\Leftrightarrow \quad & y &=& \sqrt{1-(x+c)^2}
\end{aligned}$$

mit $c = 0$ als eine Lösung des Anfangswertproblem. Zusätzlich ist aber auch $y(x) \equiv 1$ eine Lösung.

c) Für das explizite Euler-Verfahren erhalten wir

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) \\
&= 1 + h \cdot 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

unabhängig von h. Mit diesem Verfahren erhalten wir also niemals die nichttriviale Lösung $y(x)$!

Aufgabe 2: *Ordnungsbedingungen für Runge-Kutta-Verfahren*

Gesucht sei ein explizites 3-stufige Runge-Kutta-Verfahren mit dem Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ c_2 & a_{21} & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

a) Leiten Sie die Bedingungen her, die zur Verfahrensordnung $p = 3$ führen.

b) Verwendet man als zugrundeliegende Quadraturformel die Simpson-Regel, so gilt:

$$c_2 = 1/2, \quad c_3 = 1, \quad b_1 = b_3 = 1/6 \quad \text{und} \quad b_2 = 2/3.$$

Wie lauten die verbleibenden Koeffizienten, damit das zugehörige RK-Verfahren Ordnung $p = 3$ hat? Dabei soll $\sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} = c_k$ gelten.

Lösung:

a) Die Verfahrensvorschrift des expliziten 3-stufigen RK-Verfahrens ist festgelegt durch

$$\begin{aligned} K_1(x,y) &= f(x,y), \\ K_2(x,y) &= f(x + c_2 h, y + h a_{21} f(x,y)), \\ K_3(x,y) &= f(x + c_3 h, y + h a_{31} f(x,y) + h a_{32} K_2(x,y)) \end{aligned}$$

und

$$\phi(x,y,h) = b_1 K_1(x,y) + b_2 K_2(x,y) + b_3 K_3(x,y).$$

Zur besseren Übersicht entwickeln wir zunächst die Korrekturen einzeln. Für K_2 ergibt sich (ohne Argument (x,y))

$$K_2 = f + h c_2 f_x + h a_{21} f_y f + \frac{1}{2} h^2 \left(c_2^2 f_{xx} + 2 c_2 a_{21} f_{xy} f + a_{21}^2 f_{yy}(f,f) \right) + O(h^3),$$

wobei $O(h^3)$ ausreichend ist, da ϕ noch mit h multipliziert wird. Für K_3 erhalten wir

$$\begin{aligned} K_3 = {} & f + h c_3 f_x + h a_{31} f_y f + h a_{32} f_y K_2 + \frac{1}{2} h^2 \Big(c_3^2 f_{xx} + 2 c_3 a_{31} f_{xy} f + 2 c_3 a_{32} f_{xy} K_2 + \\ & + f_{yy}(a_{31} f, a_{31} f) + 2 f_{yy}(a_{31} f, a_{32} K_2) + f_{yy}(a_{32} K_2, a_{32} K_2) \Big) + O(h^3). \end{aligned}$$

Einsetzen der Taylor-Entwicklung von K_2 liefert (wegen Multiplikation mit h kann auf höhere Terme verzichtet werden)

$$\begin{aligned} K_3 = {} & f + h c_3 f_x + h a_{31} f_y f + h a_{32} f_y (f + h c_2 f_x + h a_{21} f_y f) + \\ & + \frac{1}{2} h^2 \Big(c_3^2 f_{xx} + 2 c_3 a_{31} f_{xy} f + 2 c_3 a_{32} f_{xy} f + \\ & + f_{yy}(a_{31} f, a_{31} f) + 2 f_{yy}(a_{31} f, a_{32} f) + f_{yy}(a_{32} f, a_{32} f) \Big) + O(h^3) \end{aligned}$$

und ein Zusammenfassen nach den elementaren Differenzialen

$$\begin{aligned} K_3 = {} & f + h c_3 f_x + h(a_{31} + a_{32}) f_y f + h^2 a_{32} a_{21} f_y f_y f + h^2 a_{32} c_2 f_y f_x + \\ & + \frac{1}{2} h^2 \Big(c_3^2 f_{xx} + 2 c_3 (a_{31} + a_{32}) f_{xy} f + (a_{31} + a_{32})^2 f_{yy}(f,f) \Big) + O(h^3). \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit der Taylor-Entwicklung der exakten Lösung

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + hy' + \frac{1}{2}h^2 y''(x) + \frac{1}{6}h^3 y'''(x) + O(h^4) \\ &= y(x) + hf + \frac{1}{2}h^2(f_x + f_y f) + \\ &\quad + \frac{1}{6}h^3(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_y f_x + f_y f_y f + f_{yy}(f,f)) + O(h^4) \end{aligned}$$

ergibt nach Einsetzen der Stufen in ϕ die Bedingungsgleichungen der folgenden Tabelle:

Ordnung	Differential	Gleichung
1	f	$b_1 + b_2 + b_3 = 1$
2	f_x	$b_2 c_2 + b_3 c_3 = 1/2$
	$f_y f$	$b_2 a_{21} + b_3(a_{31} + a_{32}) = 1/2$
3	f_{xx}	$b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = 1/3$
	$f_{xy} f$	$b_2 c_2 a_{21} + b_2 c_3(a_{31} + a_{32}) = 1/3$
	$f_y f_x$	$b_3 a_{32} c_2 = 1/6$
	$f_y f_y f$	$b_3 a_{32} a_{21} = 1/6$
	$f_{yy}(f,f)$	$b_2 a_{21}^2 + b_3(a_{31} + a_{32})^2 = 1/3.$

Bei Vereinfachung durch $c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$ lauten die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 &= 1, \\ b_2 c_2 + b_3 c_3 &= 1/2, \\ b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 &= 1/3, \\ b_3 a_{32} c_2 &= 1/6. \end{aligned}$$

Setzt man die Konsistenz der Zeilensummen $c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$ gleich voraus, kann man die Ordnungsbedingungen auch aus der autonomen Differenzialen $y' = f(y)$ ableiten. Analoges Vorgehen bedeutet:

$$\begin{aligned} K_1(y) &= f(y), \\ K_2(y) &= f(y + ha_{21}f(y)), \\ K_3(y) &= f(y + ha_{31}f(y) + ha_{32}K_2(y)) \end{aligned}$$

und

$$\phi(x,y,h) = b_1 K_1(y) + b_2 K_2(y) + b_3 K_3(y).$$

Für K_2 ergibt sich die Taylorentwicklung (mit $K_1 = f(y)$)

$$K_2 = f + ha_{21} f_y f + \frac{1}{2}h^2 a_{21}^2 f_{yy}(f,f) + O(h^3). \tag{1}$$

Für K_3 erhalten wir

$$K_3 = f + hf_y(a_{31}K_1 + a_{32}f_y K_2) + \frac{1}{2}h^2 f_{yy}(a_{31}K_1 + a_{32}K_2, a_{31}K_1 + a_{32}K_2) + O(h^3).$$

Es gilt K_1 unabhängig. Jedoch ist K_2 ebenfalls von h abhängig, so dass man die Taylorentwicklung von (1) einsetzen muss, um K_3 nach h-Potenzen zu sortieren:

$$K_3 = f + h(a_{31} + a_{32})f_y f + \frac{1}{2}h^2\Big(2a_{32}a_{21}f_y f_y f + (a_{31} + a_{32})^2 f_{yy}(f,f)\Big) + O(h^3).$$

Ein Vergleich mit der Taylor-Entwicklung der exakten Lösung

$$y(x+h) \;=\; y(x) + hf + \frac{1}{2}h^2(f_x + f_y f) + \frac{1}{6}h^3(f_y f_y f + f_{yy}(f,f)) + O(h^4)$$

ergibt nach Einsetzen der Stufen in ϕ

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + h(b_1K_1 + b_2K_2 + b_3K_3) \\ &= y(x) + h(b_1+b_2+b_3)f + h^2\Big(b_2a_{21} + b_3(a_{31}+a_{32})\Big)f_y f \\ &\quad +h^3\Big(\big(\frac{b_2}{2}a_{21}^2 + \frac{b_3}{2}(a_{31}+a_{32})^2\big)f_{yy}(f,f) + b_3a_{32}a_{21}f_yf_yf\Big) + O(h^4). \end{aligned}$$

die Bedingungsgleichungen wie oben (mit $c_2 = a_{21}, c_3 = a_{31} + a_{32}$):

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 &= 1, \\ b_2c_2 + b_3c_3 &= 1/2, \\ b_2c_2^2 + b_3c_3^2 &= 1/3, \\ b_3a_{32}c_2 &= 1/6. \end{aligned}$$

b) Mit den Vorgaben

$$c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_3 = 1, \quad b_1 = b_3 = \frac{1}{6} \quad \text{und} \quad b_2 = \frac{2}{3}$$

sind die ersten drei Bedingungsgleichungen erfüllt und es bleiben als unbekannte noch a_{31} und a_{32}. Auflösen der vierten Bedingungsgleichung liefert

$$a_{32} = \frac{1}{6b_3c_2} = 2$$

und

$$a_{31} = c_3 - a_{32} = -1,$$

so dass wir insgesamt das Butcher-Tableau erhalten:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array}$$