PROF. DR. BERND SIMEON
CHRISTIAN GOBERT
THOMAS MÄRZ

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

# Numerik

SS 2009

## Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 4

**Aufgabe 1:** *(Rücktransformation von Eigenvektoren)*

Die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wurde durch $n-2$ Householder-Transformationen in Tridiagonalgestalt $C$ überführt, d.h.

$$\begin{aligned} C &= H_{n-2}\cdot \ldots \cdot H_1 A H_1 \cdot \ldots \cdot H_{n-2} \\ H_i &:= I - \chi_i u_i u_i^T, \quad \chi_i = \frac{2}{u_i^T u_i} \neq 0, \\ u_i &= (0,\ldots,0,u_{i+1,i},\ldots,u_{ni})^T, \quad i = 1,\ldots,n-2. \end{aligned}$$

$z$ sei ein Eigenvektor der Tridiagonalmatrix $C$ zum Eigenwert $\lambda_k$.

Man formuliere einen *effizienten* Algorithmus, der zu gegebenen Größen $z, \chi_i, u_i$ für $i = 1,\ldots,n-2$ den Eigenvektor $y$ von $A$ zum Eigenwert $\lambda_k$ berechnet.

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:**

Ist $z$ ein Eigenvektor der durch $n-2$ Householdertransformationen erzeugten Tridiagonalmatrix $C$ zum Eigenwert $\lambda_k$, dann bedeutet das

$$\begin{aligned} Cz = H_{n-2}\cdot \ldots \cdot H_1 A H_1 \cdot \ldots \cdot H_{n-2} z &= \lambda_k z \\ \Rightarrow \quad A \underbrace{H_1 \cdot \ldots \cdot H_{n-2} z}_{=:y} &= \lambda_k \underbrace{H_1 \cdot \ldots \cdot H_{n-2} z}_{=y}, \end{aligned}$$

d.h. $y = H_1 \cdot \ldots \cdot H_{n-2} z$ ist Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $\lambda_k$, denn die Matrizen $A$ und $C$ haben dieselben Eigenwerte.
Algorithmisch ergäbe sich für die Berechnung des Eigenvektors der Ablauf

für $i = n-2, n-3, \ldots, 2, 1$
    $z := H_i z$
$y := z$

wobei alle Matrizen $H_1,\ldots,H_{n-2}$ gespeichert werden müssten, wenn man den Eigenvektor $y$ aus $z$ gewinnen will.
Es bedeutet aber jedes Produkt $H_i \cdot z$ ausgeschrieben

$$H_i \cdot z = (I - \chi_i u_i u_i^T) z \;=\; z - u_i \cdot \chi_i u_i^T z.$$

Nun sind die $u_i = (0,\ldots,0,u_{i+1,i},\ldots,u_{ni})^T$ nur in den Komponenten $j = i+1,\ldots,n$ ungleich Null. Daher besteht das Skalarprodukt $u_i^T z$ nur aus der Summe über die letzten $n-i$ Einzelprodukte der beiden Vektorkomponenten. Es sei

$$\alpha \;:=\; \chi_i \cdot \sum_{j=i+1}^{n} u_{ji} z_j.$$

Weil sich auch nur die letzten $n-i$ Komponenten des Vektors $z$ bei Addition mit $-(\chi_i u_i^T z) u_i$ ändern, erhalten wir den Algorithmus für $i = n-2, n-3, \ldots, 2, 1$

  $\alpha := \chi_i \cdot \sum_{j=i+1}^{n} u_{ji} z_j$

  für $j = i+1, \ldots, n$

    $z_j := z_j - \alpha u_{ji}$

$y := z$

Da $i$ abwärts zählt, hat man erst im $n-2$-ten Schritt jede Komponente des Eigenvektors $y$ von $A$. Mit dem zweiten Algorithmus braucht man statt $n-2$ Householdermatrizen nur eine untere Dreiecksmatrix $U = (u_{ij})$ zu speichern mit den Vektoren $u_i$ als Spalten und den Werten $\chi_i$ zum Beispiel als Diagonalelementen.

**Aufgabe 2:** *(Eigenwertabschätzungen)*

Es sei $A$ eine diagonalisierbare $n \times n$-Matrix, d.h. es existiert eine reguläre Matrix $T$ mit

$$T^{-1}AT = \mathrm{diag}(\lambda_i) =: D\ ,$$

wobei $\lambda_i$ die (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerte von $A$ sind. $F$ sei eine $n \times n$-Matrix, die die Störungen der Matrix $A$ beschreibt.

a) Zeigen Sie: Ist $\lambda$ ein Eigenwert der gestörten Matrix $(A+F)$, so gilt die Abschätzung

$$\min_i |\lambda - \lambda_i| \le \kappa_2(T)\|F\|_2,$$

wobei $\kappa_2(T)$ die Konditionszahl obiger Transformationsmatrix $T$ in der $\|\cdot\|_2$-Norm ist.

b) Wie vereinfacht bzw. verändert sich die Abschätzung in a), falls $A$ hermitesch ist?

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:**

a) Sei $\lambda$ Eigenwert zu $(A+F)$ $\Rightarrow \exists$ Eigenvekor $x \neq 0 : (A+F)x = \lambda x \Leftrightarrow (\lambda I - A)x = Fx$, wobei $I$ die Einheitsmatrix sei.
1. Fall: Ist $\lambda$ auch Eigenwert von $A$, so ist $\min_i |\lambda - \lambda_i| = 0$ und die Abschätzung trivial.
2. Fall: Ist $\lambda$ kein Eigenwert von $A$, dann gilt

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)x &= Fx \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda I - A)TT^{-1}x = FTT^{-1}x \\ \Leftrightarrow \quad (T^{-1}(\lambda I - A)T)T^{-1}x &= (T^{-1}FT)T^{-1}x \\ \Leftrightarrow \quad \mathrm{diag}(\lambda - \lambda_i)(T^{-1}x) &= (T^{-1}FT)(T^{-1}x). \end{aligned}$$

Da $\lambda$ kein Eigenwert von $A$ ist die Matrix $\mathrm{diag}(\lambda - \lambda_i)$ nicht singulär, d.h. es existiert $\mathrm{diag}(\lambda - \lambda_i)^{-1} \quad \Rightarrow$

$$T^{-1}x = \mathrm{diag}(\lambda - \lambda_i)^{-1}(T^{-1}FT)T^{-1}x.$$

Nun ist die $\|\cdot\|_2$-Norm submultiplikativ, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \|T^{-1}x\|_2 &\le \|\mathrm{diag}(\lambda - \lambda_i)^{-1}\|_2 \|T^{-1}FT\|_2 \|T^{-1}x\|_2 \\ \Leftrightarrow \quad 1 &\le \|\mathrm{diag}(\lambda - \lambda_i)^{-1}\|_2 \|T^{-1}FT\|_2. \qquad (*) \end{aligned}$$

Die Matrix $\mathrm{diag}(\lambda - \lambda_i)^{-1}$ ist symmetrisch und hat die Eigenwerte $\frac{1}{\lambda - \lambda_i}$, damit gilt für die $\|\cdot\|_2$-Norm dieser Matrix:

$$\begin{aligned} \max_i \frac{1}{|\lambda - \lambda_i|} &= \|\mathrm{diag}(\lambda - \lambda_i)^{-1}\|_2 \overset{(*)}{\ge} \frac{1}{\|T^{-1}FT\|_2} \\ \overset{\text{Kehrwert}}{\Leftrightarrow} \quad \min_i |\lambda - \lambda_i| &\le \|T^{-1}FT\|_2 \le \|T^{-1}\|_2 \|F\|_2 \|T\|_2 = \kappa_2(T)\|F\|_2. \end{aligned}$$

b) Ist $A$ hermitesch, so ist $T$ unitär wählbar, d.h. $\kappa_2(T) = 1$. Damit gilt:

$$\min_i |\lambda - \lambda_i\| \leq \|F\|_2.$$

Fazit: Der absolute Fehler zwischen den Eigenwerten der originalen Matrix $A$ und denen der gestörten Matrix $(A + F)$ ist im wesentlichen durch die $\|\cdot\|_2$-Norm der Störung $F$ und der $\|\cdot\|_2$-Kondition der Transformationsmatrix $T$ beschränkt.