PROF. DR. BERND SIMEON
CHRISTIAN GOBERT
THOMAS MÄRZ

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Numerik

SS 2009

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 *Clenshaw-Curtis-Quadratur*
Wie bereits bei der Polynominterpolation bietet es sich auch zur Quadratur an Tschebysheff-Knoten als Stützstellen zu verwenden. Mit der Substitution $x = \cos(\theta)$ erhält man

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{\pi} f(\cos(\theta))\sin(\theta)d\theta \,.$$

Das neue Integral behandelt man mit Stützstellen $\theta_j = 2\pi \cdot j/N$, $j = 0,\dots,n$, $N = 2n$ somit sind die korrespondierenden $x_j = \cos(\theta_j)$, $j = 0,\dots,n$ die $n+1$ Tschebysheff-Knoten im Intervall $[-1,1]$.

a) Nehmen Sie an zu $F(\theta) := f(\cos(\theta))$ sei die Kosinus-Transformation bekannt

$$F(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\theta) \,.$$

Wie berechnet sich der Wert $I(f)$ in Abhängigkeit von den A_k ?
Hinweis: $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.

b)
1. Welche Eigenschaft muss eine 2π-periodische Funktion G haben, damit ihre Fourierreihe nur Kosinus-Glieder enthält ?
2. Die Funktion F aus Teil a) ist auf $[0,\pi]$ erklärt. Setzen Sie F geeignet auf $[-\pi,0]$ fort.
3. Die n-te Fourier-Partialsumme einer 2π-periodischen Funktion G ist gegeben durch

$$S_n(G)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \,.$$

   Welche Beziehung besteht zwischen a_k, b_k und c_k, c_{-k} ?
4. Die c_k werden mittels diskreter Fourier-Transformation berechnet:

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} G(\theta_j)e^{-i\cdot\theta_j} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} G(\theta_j)e^{-i\cdot 2\pi\cdot j/N} \,.$$

   Zeigen Sie: $c_{-k} = c_{N-k}$
5. Wie bekommt man mit Hilfe der diskreten Fourier-Transformation der Funktion $F(\theta)$ aus Punkt 2 die Koeffizienten A_k der diskreten Kosinus-Transformation?

c) Formulieren Sie aus a) und b) eine Quadratur-Formel (Clenshaw-Curtis-Algorithmus).

Lösungsvorschalg zu Aufgabe 1

a) Für die Integrale nutze man den Hinweis:

$$\int_0^\pi \sin(\theta)\cos(k\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin((1+k)\theta)\,d\theta + \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin((1-k)\theta)\,d\theta$$

Sonderfall $k=1$:

$$\int_0^\pi \sin(\theta)\cos(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(2\theta)}{2}\right]_0^\pi = 0$$

Ansonsten $k \neq 1$:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin(\theta)\cos(k\theta)\,d\theta &= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos((1+k)\theta)}{1+k}\right]_0^\pi + \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos((1-k)\theta)}{1-k}\right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{-(-1)^{1+k}}{1+k} - \frac{-1}{1+k}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-(-1)^{1-k}}{1-k} - \frac{-1}{1-k}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{-(-1)^{1+k}}{1+k} - \frac{-1}{1+k}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-(-1)^{1-k}}{1-k} - \frac{-1}{1-k}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+k} + \frac{1}{1-k}\right)((-1)^k+1) \\
&= \frac{1}{1-k^2}((-1)^k+1) = \begin{cases} 0 & ,\ k \quad \text{ungerade} \\ \frac{2}{1-k^2} & ,\ k \quad \text{gerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

Und damit folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin(\theta)F(\theta)\,d\theta &= \sum_{k=0}^\infty A_k \int_0^\pi \sin(\theta)\cos(k\theta)\,d\theta \\
&= \sum_{k=0}^\infty A_{2k}\frac{2}{1-4k^2} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_{2k}\frac{2}{1-4k^2} + \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor+1}^\infty A_{2k}\frac{2}{1-4k^2}
\end{aligned}$$

b) 1. Für die 2π-periodische Funktion G ist die Fourier-Reihe (im Konvergenzfall bei Stetigkeitstellen x)

$$G(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)$$

Wobei für $k \in \mathbb{N}_0$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi G(x)\cos(kx)\,dx \quad , \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi G(x)\sin(kx)\,dx$$

gelten (insbesondere die Erweiterung $b_0 = 0$). Man sieht sofort, falls $G(x)$ gerade ist, so ist $G(x)\sin(kx)$ ungerade und damit $b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

2. Um obiges auszunutzen muss man F erstens geignet auf $[-\pi, 0]$ fortsetzen so, dass F auf $[-\pi, \pi]$ eine gerade Funktion ist und dann 2π-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ aus dehnen.

   Da $F(\theta) = f(\cos(\theta))$ ist für das Intervall $[-\pi, \pi]$ nichts zu tun. Um später aber die diskrete FT anzuwenden sollten man F satt dessen auf $[0, 2\pi]$ erklären, also

$$F(\theta) = \begin{cases} f(\cos(\theta)) & , \theta \in [0, \pi] \\ f(\cos(2\pi - \theta)) & , \theta \in]\pi, 2\pi] \end{cases} .$$

3. Man gehe mit der Eulerformel in Sinus/Kosinus-Darstellung

$$\begin{aligned} S_n(G)(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}) - i\frac{b_k}{2}(e^{ikx} - e^{-ikx}) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikx} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx} \\ &= \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \end{aligned}$$

   damit

$$a_k = c_k + c_{-k} \quad , \quad b_k = i(c_k - c_{-k})$$

   für $k \in \{0, \dots, n\}$ unter Verwendung von $b_0 = 0$.

4. Es gilt

$$e^{-i2\pi\frac{N-k}{N}} = e^{-i2\pi} e^{-i2\pi\frac{(-k)}{N}} = e^{-i2\pi\frac{(-k)}{N}}$$

   also

$$c_{N-k} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} G(\theta_j) e^{-i\cdot 2\pi \cdot \frac{N-k}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} G(\theta_j) e^{-i\cdot 2\pi \cdot \frac{(-k)}{N}} = c_{-k}$$

5. Mit der Fortsetzung von 2. ist F nun gerade und 2π-periodisch also ist die Fourierreihe nach 1.

$$F(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\theta) .$$

   Koeffizientenvergleich mit der Kosinusreihe ergibt

$$A_0 = \frac{a_0}{2} \quad , \quad A_k = a_k , \ k \in \mathbb{N}$$

   unter Verwendung der komplexen Fourierreihe also

$$A_0 = c_0 \quad , \quad A_k = c_k + c_{-k} , \ k \in \mathbb{N} .$$

   Bei Verwendung der DFT erhält man nur endlich viele Koeffizienten die nach 4. so aussehen

$$A_0 = c_0 \quad , \quad A_k = c_k + c_{N-k} , \ k \in 1, \dots, n .$$

c) Ein Program das $n+1$ Tschebysheff-Knoten im Intervall $[-1, 1]$ benutzt (wobei $n \in \mathbb{N}$ damit die Ränder immer mitgenommen werden), könnte so aussehen

```
function I= CCquad(f,n)
    N = 2*n;
    theta = [0:N-1] * 2* pi/N;
    x = cos(theta);
    F = feval(f,x);
    c = fft(F)/N;

    A = zeros(n+1,1);
    A(1) = c(1);
    A(2:(n+1)) = c(2:(n+1)) + c(N:-1:n+1);

    nn = floor(n/2);
    g = 2./(1-4*[0:nn].^2);

    I = g * A(1:2:end);
```

Aufgabe 2 *Rund um Quadratur*

a) Beantworten Sie folgende Fragen zur Quadratur:

- Welche Qudraturverfahren kennen Sie?
- Welche Ideen/Prinzipien stecken dahinter?
- Warum sollten Newton-Cotes-Formeln eher nicht angewandt werden?
- Was zeichnet die Gauß-Quadratur aus?
- Wie ist das Konstruktionsprinzip der Gauß-Quadratur?
- Was besagt der Peano-Kern-Satz?
- Was bedeutet Adaptivität?
- Was macht folgender Code?

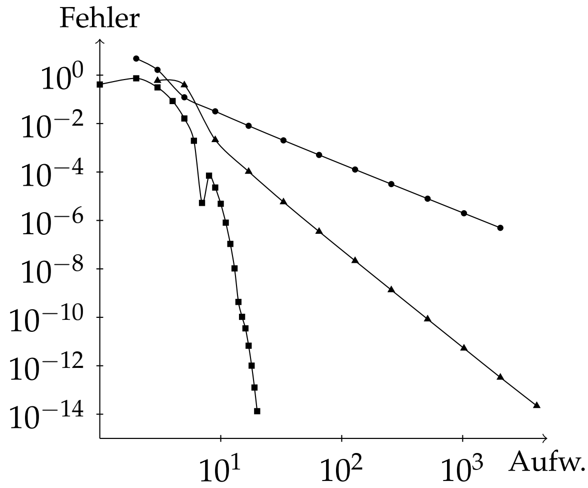
```
function I=tuwas(f,a,b,tol)
y=feval(f,[a (a+b)/2 b]);
if (b-a)*abs(y(1)/4-y(2)/2+y(3)/4)<3*tol
   I=(b-a)*(y(1)+2*y(2)+y(3))/4;
else
   I=tuwas(f,a,(a+b)/2,tol)+tuwas(f,(a+b)/2,b,tol);
end;
```

b) Beurteilen Sie folgende Aussagen und begründen Sie Ihre Ja/Nein-Antworten:

1. Die Newton-Cotes-Formeln sind besonders effektiv, denn man benötigt nur wenige Funktionsauswertungen für die Integration von Polynomen hohen Grades.
2. Gauß-Legendre-Quadratur-Formeln besitzen immer positive Gewichte.
3. Zur Gauß-Legendre-Quadratur mit 10 Stützstellen existiert eine Fehlerschätzung, die nur die 3. Ableitung des Integranden benötigt.
4. Jede konsistente Quadraturformel integriert lineare Funktionen exakt.
5. Sei S eine summatorische Quadraturformel, die als Basisverfahren eine Gauß-Legendre Quadraturformel verwendet, dann ist die Abbildung $f \rightarrow S(f)$ linear.

c) Aufwand-Genauigkeits-Diagramme:
Zur Berechnung des Integrals $\int_0^5 \sin(x)e^{\sin x}dx$ wurden verwendet:

1. die summatorische Simpsonregel zu verschiedenen Schrittweiten h,
2. die Gauß-Legendre Quadratur (auf $[0,5]$ transformiert) zu verschiedener Anzahl von Stützstellen,
3. die summatorische Trapezregel zu verschiedenen Schrittweiten h.



Welcher Graph im nebenstehenden Aufwands-Genauigkeits-Diagramm gehört zu welcher Quadraturformel? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschalg zu Aufgabe 2

a) Die ersten 7 Fragen selber machen.

Zum Code: das ist die adaptive Trapezregel, wobei zum Fehlerschätzen einmal Standard über $[a,b]$ quadriert wird, also

$$T_1(f) = \frac{f(a)+f(b)}{2} \cdot (b-a)$$

und zum andernmal Trapez-summatorisch über $[a, \frac{a+b}{2}]$ und $[\frac{a+b}{2}, b]$ quadriert wird

$$T_2(f) = \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \cdot \frac{b-a}{2} \, .$$

Fehlerschätzer ist dann

$$|T_1(f) - T_2(f)| \, .$$

Falls die Toleranz erfüllt ist wird $I = T_2(f)$ zurückgeliefert, das sollte ja der genauere Wert sein. Andernfalls Bisektionsrekursion.

b) 1. Frage : Nein
2. Frage : Ja
3. Frage : Ja, man kann sich eine basteln. Ist halt nicht optimal für glatte Funktionen, aber anwendbar für weniger glatte.
4. Frage : Nein, nur konstanten werden exakt integriert
5. Frage : Ja, offensichtlich.

c) Die Überlegung gilt erstmal für summatorische QF zur Schrittweite $h = \frac{b-a}{n}$. Wenn nun pro Subinterval eine interpolatorische Basis-QF genommen wird, dann ist die Anzahl der f-Auswertungen

$$\sharp f = c_1 \cdot n$$

und somit

$$h = c_2 \cdot (\sharp f)^{-1}$$

Sollte der Fehler $\varepsilon = O(h^p)$ sein so folgt

$$\varepsilon = c_3 \cdot (\sharp f)^{-p}$$

und somit

$$\log \varepsilon = \log c_3 - p \cdot \log(\sharp f)$$

also sollte sich im Idealfall im Aufwands-Genauigkeits-Diagramm (bei doppelt - logarithmischem Plot) eine Gerade mit Steigung p abzeichnen.

Die letzten beiden Formeln kommen ohne h aus, sind also auch z.B. bei Gauß-Quadratur anwendbar wo es gar kein h gibt oder bei adaptiven Verfahren wo es ganz viele h (in einem Lauf) gibt. In diesem Fall kann man sich das so denken, dass ein h implizit über $\sharp f$ definiert ist (aber auch nicht weiter wichtig ist). p ist im Fall des Falles per Ausgleichsrechnung zu bestimmen.

Hier ist der Integrand glatt, also treffen die Fehlerformeln auch zu. Nach der Theorie sollte sich für Trapez Ordnung 2 und für Simpson Ordnung 4 abzeichnen insbesondere muss für diese tatsächlich ein Geradenstück im Diagramm rauskommen. Die langsam fallende Kurve ist Trapez, die nächst schnellere Simpson und nach Ausschluß die letzte halt Gauß.