PROF. DR. BERND SIMEON
CHRISTIAN GOBERT
THOMAS MÄRZ

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

# Numerik

SS 2009

## Lösungsvorschläge zu Blatt 2

**Aufgabe 1** *Newton-Cotes Formeln*
Die Newton-Cotes Quadraturformel mit $s = n+1$ äquidistanten Stützstellen ist so konstruiert, dass Polynome mit Grad $\leq n$ exakt integriert werden.

Zeigen Sie: Für gerades $n$ werden auch Polynome mit Grad $\leq n+1$ exakt integriert.

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1**
Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade. Wir betrachten ohne Einschränkung Newton-Cotes Formeln auf dem Einheitsintervall $[0,1]$. Für die Newton-Cotes Formel $\hat{I}_n$ zu den Stützstellen $x_j = j/n$, $j = 0, \ldots, n$ gilt:

$$\hat{I}_n(f) = \int_0^1 p_n(f)(x)\, dx,$$

wobei $p_n(f) \in \mathbb{P}_n$ das Interpolationspolynom ist, welches $f$ an den Stützstellen $x_j$ interpoliert.

Sei nun $q \in \mathbb{P}_{n+1}$ ein Polynom vom Grad $n+1$. Für den Fehler der Polynominterpolation gilt die Restgliedformel:

$$q(x) - p_n(q)(x) = \frac{q^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

mit geeignetem $\xi \in \mathbb{R}$. Für Polynome vom Grad $n+1$ ist $q^{(n+1)}/(n+1)! \equiv c$ konstant. Damit gilt:

$$\hat{I}_n(q) = \int_0^1 p_n(q)(x)\, dx = \int_0^1 q(x)\, dx - c \int_0^1 \omega_{n+1}(x)\, dx \tag{1}$$

mit $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$. Man überlegt sich leicht, dass

$$\omega_{n+1}(1-x) = -\omega_{n+1}(x).$$

für alle $x \in [0,1]$ gilt. Folglich ist

$$\int_0^1 \omega_{n+1}(x)\, dx = -\int_0^1 \omega_{n+1}(1-x)\, dx = -\int_0^1 \omega_{n+1}(x)\, dx = 0,$$

und die Behauptung ergibt sich aus Gleichung (**??**).

**Aufgabe 2** *Konstruktion einer Quadraturformel*
Für $h > 0$ soll das spezielle Integral

$$I(f) := \int_{-h}^{h} x^2 \sqrt{|x|} f(x)\, dx \qquad \text{durch} \qquad \tilde{I}(f) := \alpha_1 f(-h) + \alpha_2 f(0) + \alpha_3 f(h)$$

approximiert werden.

(a) Bestimmen Sie die $\alpha_i$ so, dass $I(p) = \tilde{I}(p)$ für alle $p \in \mathbb{P}_2$.

(b) Bis zu welchem Polynomgrad ist die Quadraturformel $\tilde{I}$ exakt?

(c) Leiten Sie eine Fehlerabschätzung der Form

$$|I(f) - \tilde{I}(f)| \leq c h^q \|f^{(p)}\|_\infty$$

her. Bestimmen Sie $p$, $q$ und $c$.

(d) Was lernen Sie aus dem Vergleich der Fehlerabschätzung $(c)$ mit der entsprechenden Fehlerabschätzung der Simpson-Regel für obiges Integral?

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2**

(a) Aus den Bedingungen, dass $I(p_i) = \tilde{I}(p_i)$ speziell für die Monome $p_i(x) = x^i$, $i = 0, 1, 2$ erfüllt sein muss, ergibt sich folgendes Gleichungssystem für die $\alpha_i$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= \tfrac{4}{7} h^{7/2} \\ -h\alpha_1 \qquad + h\alpha_3 &= 0 \\ h^2\alpha_1 \qquad + h^2\alpha_3 &= \tfrac{4}{11} h^{11/2} \end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2/11, 16/77, 2/11) \cdot h^{7/2}$.

(b) Jedenfalls gilt dies nach Konstruktion für Polynome bis zum Grad 2. Sei $q \in \mathbb{P}_3$ ein Polynom dritten Grades. Mit der Fehlerformel der Polynominterpolation gilt:

$$q(x) - p_2(q)(x) = \frac{q^{(3)}(\xi)}{3!}(x + h) \cdot x \cdot (x - h),$$

wobei $p_2(q) \in \mathbb{P}_2$ das Interpolationspolynom von $q$ bezeichnet. Da $q$ Grad 3 hat, ist $q^3(\xi)/3! \equiv c$ konstant. Es gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{I}(q) &= \int_{-h}^{h} x^2 \sqrt{|x|} p_2(q)(x)\, dx \\ &= \int_{-h}^{h} x^2 \sqrt{|x|} q(x)\, dx - c \int_{-h}^{h} x^2 \sqrt{|x|} \cdot (x + h) \cdot x \cdot (x - h)\, dx, \end{aligned}$$

wobei der letzte Summand verschwindet, weil über eine ungerade Funktion integriert wird. Mithin gilt $\tilde{I}(q) = I(q)$ sogar für alle Polynome vom Grad 3.

Am einfachen Beispiel $q(x) = x^4$ sieht man, dass

$$\frac{4}{11} h^{15/2} = \tilde{I}(q) \neq I(q) = \frac{4}{15} h^{15/2}.$$

Somit ist die QF bis zum Grad 3 exakt.

(c) Sei $f$ hinreichend glatt. Sei $p \in \mathbb{P}_3$ das Hermite-Interpolationspolynom zu den Stützstellen $-h, 0, 0, h$. Dann gilt für $x \in [-h, h]$ die Fehlerabschätzung:

$$|f(x) - p(x)| = \left| \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x+h) \cdot x^2 \cdot (x-h) \right| \leq \frac{\|f^{(4)}\|_\infty}{24} \cdot \frac{1}{4} h^4$$

mit einem $\xi \in [-h, h]$. Folglich ist wegen Aufgabenteil (b)

$$\begin{aligned} |I(f) - \tilde{I}(f)| &= |I(f) - I(p)| \leq \int_{-h}^{h} x^2 \sqrt{|x|}\, dx \cdot \frac{\|f^{(4)}\|_\infty}{24} \cdot \frac{1}{4} h^4 = \\ &= \frac{1}{168} h^{15/2} \|f^{(4)}\|_\infty. \end{aligned}$$

(d) Der Integrand $x^2 \sqrt{|x|} f(x)$ erfüllt selbst für glatte Funktionen $f$ im Allgemeinen nicht die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen der Fehlerabschätzung der Simpsonregel. Damit verbunden ist unter Umständen ein Ordnungsverlust bei der Approximation des Integrals $I(f)$ mit der Simpsonregel. Als Beispiel betrachten wir $f \equiv 1$. Dann gilt für die Simpson-Approximation des Integrals mit $g(x) = x^2 \sqrt{|x|}$:

$$I(f) \approx S(g) = \frac{2h}{6}(g(-h) + 4g(0) + g(h)) = \frac{2}{3} h^{3,5}$$

während $I(1) = \frac{4}{7} h^{3,5}$. Der Fehler der Simpson-Approximation ist somit in diesem Fall

$$|S(g) - I(1)| = \frac{2}{21} h^{3,5}.$$

Selbstverständlich ist $\tilde{I}(1) = I(1)$ exakt.