Modulprüfung MA2302 „Numerik“

8. Oktober 2009

Musterlösung

Prüfer: Prof. Dr. Bernd Simeon

Aufgabe 1 (ca. 12 P.)

Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Das bestimmte Integral

$$I_n(f) := \int_{-h}^{h} x^{2n} f(x)dx$$

soll durch die Quadraturformel

$$J_n(f) := g_1 f(-h) + g_2 f(0) + g_3 f(h)$$

approximiert werden.

a) Bestimmen Sie für $n = 1$ die Gewichte g_1, g_2, g_3 so, dass die Quadraturformel J_1 für Polynome vom Grad 2 exakt ist.

b) Zeigen Sie, dass die Quadraturformel aus a) genau die Ordnung 4 hat.

c) Bestimmen Sie C, p, q mit größtmöglichem p so, dass folgende Fehlerabschätzung gilt:

$$|I_1(f) - J_1(f)| \leq C \|f^{(p)}\|_\infty h^q$$

d) Welche Quadraturformel ergibt sich im Fall $n = 0$, falls möglichst hohe Ordnung erzielt werden soll? (kurze Antwort genügt)

Lösung Aufgabe 1

a) Die Monome $\{m_k(x) = x^k\}_{k=0..l}$ bilden eine Basis des Polynomraumes $\mathbb{P}_l$. Für Exaktheit bis Grad 2, haben wir die Bedingungsgleichungen:

$$g_1 + g_2 + g_3 = J_1(1) = I_1(1) = \int_{-h}^{h} x^2 dx = \frac{2}{3}h^3 \ ,$$

$$-g_1 h + 0 + g_3 h = J_1(x) = I_1(x) = \int_{-h}^{h} x^3 dx = 0 \ ,$$

$$g_1 h^2 + 0 + g_3 h^2 = J_1(x^2) = I_1(x^2) = \int_{-h}^{h} x^4 dx = \frac{2}{5}h^5 \ .$$

Daraus folgen die Gewichte

$$g_1 = g_3 = \frac{1}{5}h^3 \quad \text{und} \quad g_2 = \frac{4}{15}h^3 \ .$$

b) Nach Konstruktion hat J_1 mindestens die Ordnung 3, damit sie Ordnung 4 hat muss auch noch die Bedingung

$$-g_1 h^3 + 0 + g_3 h^3 = J_1(x^3) = I_1(x^3) = \int_{-h}^{h} x^5 dx = 0 \ .$$

erfüllt sein. Sie ist erfüllt, weil $g_1 = g_3$ nach Teil a) gilt. Eine höhere Ordnung ist nicht möglich, denn die nächste Bedingungsgleichung

$$g_1 h^4 + 0 + g_3 h^4 = J_1(x^4) = I_1(x^4) = \int_{-h}^{h} x^6 dx = \frac{2}{7} h^7 \ ,$$

ist verletzt (sie widerspricht der zweiten Bedingung).

c) Durch Hermiteinterpolation zu den Stützstellen $-h, 0, h$ wobei 0 als doppelte Stützstelle genommen wird kann man

$$f(x) = p(x) + r(x)$$

durch ein Polynom p vom Grad 3 und einem Restglied der Form

$$r(x) = \frac{f''''(\xi(x))}{24}(x-h)x^2(x+h)$$

ausdrücken.

Die besondere Wahl der doppelten Stützstelle dient nur dazu, dass der Polynomfaktor im Restglied möglichst einfach ist und keine Vorzeichenwechsel hat.

Wie p genau aussieht ist nicht wichtig, wichtig ist nur der Grad 3, denn dann gilt nach Teilaufgabe b)

$$I_1(p) = J_1(p) \ .$$

und nach Konstruktion außerdem

$$J_1(r) = 0 \ .$$

Weiterhin gilt dann:

$$I_1(f) - J_1(f) = I_1(p) + I_1(r) - J_1(p) - J_1(r) = I_1(r) = \int_{-h}^{h} \frac{f''''(\xi(x))}{24}(x-h)x^4(x+h) dx \ .$$

Weil $(x-h)x^4(x+h) \leq 0$ gilt (kein VZ-Wechsel), ist der Mittelwertsatz der Integralrechnung anwendbar, mit einem $\hat{\xi} \in [-h, h]$:

$$I_1(r) = \frac{f''''(\hat{\xi})}{24} \int_{-h}^{h} (x-h)x^4(x+h) dx = \frac{f''''(\hat{\xi})}{24} \left[\frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{5}h^2 x^5 \right]_{-h}^{h} = -\frac{f''''(\hat{\xi})}{24} \frac{4}{35} h^7 = -\frac{f''''(\hat{\xi})}{210} h^7$$

Folglich haben wir

$$|I_1(f) - J_1(f)| = |I_1(r)| \leq \frac{1}{210} \|f''''\|_\infty h^7 \ .$$

d) Für $n = 0$ haben wir das (ungewichtete) Integral

$$I_0(f) := \int_{-h}^{h} f(x) dx \ .$$

Die zugehörige Quadraturformal der Bauart

$$J_0(f) := \hat{g}_1 f(-h) + \hat{g}_2 f(0) + \hat{g}_3 f(h)$$

ist genau die Simpsonregel transformiert auf das Integrationsintervall $[-h, h]$.

Aufgabe 2 (ca. 9 P.)
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Zu $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $R(x)$ den Rayleighquotienten von A,

$$R(x) = \frac{x^T Ax}{x^T x}.$$

a) Zeigen Sie: Wenn x ein Eigenvektor von A ist, dann ist $R(x)$ der zugehörige Eigenwert.

Für die folgenden Teilaufgaben bezeichne v_i die orthonormalen Eigenvektoren von A und λ_i die zugehörigen Eigenwerte. Außerdem sei x ein beliebiger, auf 1 normierter Vektor (2-Norm) mit der Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \qquad \|x\|_2 = 1.$$

b) λ_{min} und λ_{max} seien der betragsmäßig kleinste bzw. größte Eigenwert von A. Zeigen Sie:

$$\lambda_{min} \le R(x) \le \lambda_{max}.$$

c) Zeigen Sie:

$$\alpha_j = 1 - \frac{1}{2}\|x - v_j\|^2.$$

d) Zeigen Sie:

$$R(x) = \lambda_k + O(\|x - v_k\|^2).$$

Lösung Aufgabe 2

a) Aus $Ax = \lambda x$ folgt

$$R(x) = \frac{x^T \lambda x}{x^T x} = \lambda$$

b) Da $\|x\|_2 = 1$ und v_i ONB ist, gilt

$$1 = x^T x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2, \qquad x^T Ax = x^T \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i.$$

Daraus folgt

$$R(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i \le \lambda_{max} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \lambda_{max}, \qquad R(x) \ge \lambda_{min} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \lambda_{min}.$$

c) Mit

$$x^T v_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i^T v_j = \alpha_j$$

erhält man

$$\|x - v_j\|^2 = (x - v_j)^T (x - v_j) = x^T x - 2x^T v_j + v_j^T v_j = 1 - 2\alpha_j + 1.$$

Daraus folgt die Behauptung.

d) Vgl. Hausaufgabenblatt 2 - hier Zugang mit Ergebnissen aus b) und c):

$$R(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i = \alpha_j^2 \lambda_j + \sum_{i \neq j} \alpha_i^2 \lambda_i$$

Aus c) folgt

$$\alpha_j^2 = 1 + O(\|x - v_j\|^2).$$

Aus b) folgt

$$\left| \sum_{i \neq j} \alpha_i^2 \lambda_i \right| \leq \sum_{i \neq j} \alpha_i^2 \, |\lambda_i| \leq \max\{|\lambda_{min}|, |\lambda_{max}|\} \sum_{i \neq j} \alpha_i^2$$

Da $\|x\|_2 = 1$ gilt

$$1 = x^T x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i \neq j} \alpha_i^2 = 1 - \alpha_j^2 = O(\|x - v_j\|^2).$$

Alles zusammennehmen:

$$R(x) = \alpha_j^2 \lambda_j + \sum_{i \neq j} \alpha_i^2 \lambda_i = \lambda_j \left(1 + O(\|x - v_j\|^2)\right) + O(\|x - v_j\|^2) = \lambda_j + O(\|x - v_j\|^2).$$

Aufgabe 3 (ca. 11 P.)
Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten Anfangswertprobleme folgender Bauart

$$y' = f(x, y) \;, \qquad y(x_0) = y_0 \;.$$

Durch nachstehendes Butchertableau

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & & & \\ c_2 & a_{21} & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & b_1 & b_2 & 0 \\ \hline & \hat{b}_1 & \hat{b}_2 & \hat{b}_3 \end{array} \qquad \text{mit } c_1 = 0,\; c_2 = a_{21},\; c_3 = a_{31} + a_{32}$$

wird gleichzeitig ein explizites, zweistufiges Runge-Kutta Verfahren

$$y_1 = y_0 + h(b_1 K_1 + b_2 K_2) \tag{1}$$

und ein explizites, dreistufiges Runge-Kutta Verfahren

$$\hat{y}_1 = y_0 + h(\hat{b}_1 K_1 + \hat{b}_2 K_2 + \hat{b}_3 K_3) \tag{2}$$

beschrieben. Dabei sind die Stufen K_i für beide Verfahren gemeinsam gegeben durch

$$K_i = f\left(x_0 + c_i h, y_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j\right) \;.$$

Für beide Verfahren gilt $x_1 = x_0 + h$.

a) Bestimmen Sie b_1 und b_2 in Abhängigkeit von c_2 so, dass das RK-Verfahren (1) Ordnung $p = 2$ besitzt.

b) Das RK-Verfahren (2) sei eingebettet in das RK-Verfahren (1), d.h. es gilt

$$b_1 = a_{31} \;, \qquad b_2 = a_{32} \;.$$

(i) Das RK-Verfahren (1) soll weiterhin Ordnung $p = 2$ haben. Welchen Wert muss dann c_3 haben ? Begründen Sie Ihr Ergebnis.

(ii) Das RK-Verfahren (2) soll (zusätzlich zu (i)) genau die Ordnung $\hat{p} = 1$ haben. Es fehlen noch die $\hat{b}_i$. Diese seien folgendermaßen festgelegt:

$$\hat{b}_1 = b_1 \;, \qquad \hat{b}_2 = 0 \;, \qquad \hat{b}_3 = b_2. \;,$$

Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen an, die sich daraus an c_2 ergeben.

c) In dieser Aufgabe soll das Butchertableau auf dem beigefügten Blatt ausgefüllt werden. Es sei

$$c_2 = \frac{1}{3} \;.$$

Berechnen Sie die fehlenden Koeffizienten a_{ij}, b_i und $\hat{b}_i$ so, dass die Anforderungen und Festlegungen aus Teilaufgabe b) erfüllt sind.

d) Zur Berechnung des nächsten Integrationsschrittes, d.h. für y_2 und $\hat{y}_2$, wird obiges Schema mit den bereits berechneten Werten x_1 und y_1 anstelle von x_0 und y_0 durchgeführt.

Welchen algorithmischen Nutzen für nächsten Integrationsschritt hat so eine Einbettung wie in Teilaufgabe b), bzw. worin besteht der Fehlbergtrick ?

Lösung Aufgabe 3

a) Nach Angabe ist das Verfahren automisierungsinvariant. Damit vereinfachen sich die Bedingungen für Ordnung $p = 2$ zu

$$b_1 + b_2 = 1$$
$$b_1 c_1 + b_2 c_2 = \frac{1}{2}$$

Weil $c_1 = 0$ gilt, folgt

$$b_2 = \frac{1}{2c_2} \;, \qquad b_1 = 1 - \frac{1}{2c_2} \;. \tag{3}$$

b) (i) Wegen der Ordnungbedigung $p = 2$, ist das RK-Verfahren (1) schon durch Teilaufgabe a) festgelegt. Nun haben wir

$$c_3 = a_{31} + a_{32} = b_1 + b_2 = 1$$

Die erste Gleichheit gilt wegen Autonomisierungsinvarianz, die zweite wegen Einbettungsforderung , die dritte wegen Teilaufgabe a).

(ii) Wir haben bereits:

$$a_{21} = c_2 \;,$$
$$a_{32} = b_2 = \frac{1}{2c_2} \;, \qquad a_{31} = b_1 = 1 - \frac{1}{2c_2} \;,$$
$$c_1 = 0 \;, \qquad c_3 = 1 \;.$$

Es fehlen noch die $\hat{b}_i$ und c_2. Weil autonomisierungsinvariant lauten die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für Ordnung $\hat{p} = 1$ (und nicht höher)

$$\hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3 = 1 \tag{4}$$

$$\hat{b}_1 c_1 + \hat{b}_2 c_2 + \hat{b}_3 c_3 \neq \frac{1}{2} \tag{5}$$

und

$$c_2 \neq 0 \qquad \text{(Gleichung (3))}. \tag{6}$$

Gleichung (4) ist mit der gegebenen Wahl erfüllt, da das erste Verfahren Ordnung 1 hat und somit

$$\hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3 = b_1 + 0 + b_2 = 1$$

gilt. Daraus erhält man also keine Einschränkung an c_2. Gleichung (5) wird zu

$$b_1 \cdot 0 + 0 + b_2 \cdot 1 \neq \frac{1}{2}, \qquad b_2 = \frac{1}{2c_2} \neq \frac{1}{2}, \qquad c_2 \neq 1. \tag{7}$$

Insgesamt lauten die notwendigen und hinreichenden Bedingungen

$$c_2 \neq 0 \quad \text{und} \quad c_2 \neq 1.$$

c) siehe Beiblatt.

d) Bezeichne K_i^* die Stufen für den neuen Integrationsschritt y_2 und K_i die Stufen für den alten y_1, dann haben wir

$$\begin{aligned} K_1^* = f(x_1, y_1) &= f(x_0 + h, y_0 + h(b_1 K_1 + b_2 K_2)) \\ &= f(x_0 + c_3 \cdot h, y_0 + h(a_{31} K_1 + a_{32} K_2)) = K_3 \; . \end{aligned}$$

Man recycelt also die (bereits berechnete) dritte Stufe K_3 des alten Integrationsschrittes als erste Stufe K_1^* des neuen Integrationsschrittes und spart somit eine f-Auswertung pro Integrationsschritt.

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Butchertableau zu Aufgabe 3c):

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
1/3 & 1/3 & & \\
1 & -1/2 & 3/2 & \\
\hline
 & -1/2 & 3/2 & 0 \\
\hline
 & -1/2 & 0 & 3/2
\end{array}
$$

Komplett richtiges b_i und $\hat{b}_i$:
Komplett richtiges c_i und a_{ij}:

Aufgabe 4 *(8 P.)*

Bepunktung dieser Aufgabe:
Für jede der folgenden Multiple-Choice Fragen wird die richtige Lösung mit +2 Punkten bewertet, die falsche Lösung mit −2 Punkten und keine Antwort mit 0 Punkten. Die vergebenen positiven oder negativen Punkte werden zu einer Gesamtpunktzahl der Aufgabe summiert. Falls die Summe negativ ist wird die Aufgabe mit 0 Punkten bewertet. Die Gesamtpunktzahl der Aufgabe kann also nicht negativ werden.

Beantworten Sie die folgenden Fragen:

Die Keplersche Fassregel (Simpsonregel) benötigt 3 Stützstellen und ist exakt für alle Polynome dritten Grades. Kann man eine Quadraturformel konstruieren, die nur 2 Stützstellen benötigt, aber ebenfalls für alle Polynome dritten Grades exakt ist? $\otimes$ Ja $\bigcirc$ Nein

---

Das QR-Verfahren berechnet sämtliche Eigenwerte einer Matrix $\otimes$ Ja $\bigcirc$ Nein

---

Für $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ und $x \in \mathbb{C}^m$ mit $x \neq 0$ gilt:

$$\underset{\lambda}{\operatorname{argmin}} \|x\lambda - Ax\|_2 = \frac{x^*Ax}{x^*x}$$

$\otimes$ Ja $\bigcirc$ Nein

Für Differenzialgleichungen mit glatter rechter Seite existieren konvergente k-Schrittverfahren der Ordnung $p = 2k$. $\bigcirc$ Ja $\otimes$ Nein