Modulprüfung MA2302 „Numerik“

8. Oktober 2009
Prüfer: Prof. Dr. Bernd Simeon

Aufgabe 1 *(ca. 12 P.)*
Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Das bestimmte Integral

$$I_n(f) := \int_{-h}^{h} x^{2n} f(x) dx$$

soll durch die Quadraturformel

$$J_n(f) := g_1 f(-h) + g_2 f(0) + g_3 f(h)$$

approximiert werden.

a) Bestimmen Sie für $n = 1$ die Gewichte g_1, g_2, g_3 so, dass die Quadraturformel J_1 für Polynome vom Grad 2 exakt ist.

b) Zeigen Sie, dass die Quadraturformel aus a) genau die Ordnung 4 hat.

c) Bestimmen Sie C, p, q mit größtmöglichem p so, dass folgende Fehlerabschätzung gilt:

$$|I_1(f) - J_1(f)| \leq C \|f^{(p)}\|_\infty h^q$$

d) Welche Quadraturformel ergibt sich im Fall $n = 0$, falls möglichst hohe Ordnung erzielt werden soll? (kurze Antwort genügt)

Aufgabe 2 *(ca. 9 P.)*
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Zu $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $R(x)$ den Rayleighquotienten von A,

$$R(x) = \frac{x^T A x}{x^T x}.$$

a) Zeigen Sie: Wenn x ein Eigenvektor von A ist, dann ist $R(x)$ der zugehörige Eigenwert.

Für die folgenden Teilaufgaben bezeichne v_i die orthonormalen Eigenvektoren von A und λ_i die zugehörigen Eigenwerte. Außerdem sei x ein beliebiger, auf 1 normierter Vektor (2-Norm) mit der Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \qquad \|x\|_2 = 1.$$

b) λ_{min} und λ_{max} seien der kleinste bzw. größte Eigenwert von A. Zeigen Sie:

$$\lambda_{min} \leq R(x) \leq \lambda_{max}.$$

c) Zeigen Sie:

$$\alpha_j = 1 - \frac{1}{2}\|x - v_j\|^2.$$

d) Zeigen Sie:

$$R(x) = \lambda_k + O(\|x - v_k\|^2).$$

Bitte wenden →

Aufgabe 3 *(ca. 11 P.)*
Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten Anfangswertprobleme folgender Bauart

$$y' = f(x,y)\ , \qquad y(x_0) = y_0\ .$$

Durch nachstehendes Butchertableau

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & & & \\ c_2 & a_{21} & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & b_1 & b_2 & 0 \\ \hline & \hat{b}_1 & \hat{b}_2 & \hat{b}_3 \end{array} \qquad \text{mit } c_1 = 0,\ c_2 = a_{21},\ c_3 = a_{31} + a_{32}$$

wird gleichzeitig ein explizites, zweistufiges Runge-Kutta Verfahren

$$y_1 = y_0 + h(b_1 K_1 + b_2 K_2) \tag{1}$$

und ein explizites, dreistufiges Runge-Kutta Verfahren

$$\hat{y}_1 = y_0 + h(\hat{b}_1 K_1 + \hat{b}_2 K_2 + \hat{b}_3 K_3) \tag{2}$$

beschrieben. Dabei sind die Stufen K_i für beide Verfahren gemeinsam gegeben durch

$$K_i = f\left(x_0 + c_i h, y_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j\right)\ .$$

Für beide Verfahren gilt $x_1 = x_0 + h$.

a) Bestimmen Sie b_1 und b_2 in Abhängigkeit von c_2 so, dass das RK-Verfahren (1) Ordnung $p = 2$ besitzt.

b) Das RK-Verfahren (2) sei eingebettet in das RK-Verfahren (1), d.h. es gilt

$$b_1 = a_{31}\ , \qquad b_2 = a_{32}\ .$$

(i) Das RK-Verfahren (1) soll weiterhin Ordnung $p = 2$ haben. Welchen Wert muss dann c_3 haben ? Begründen Sie Ihr Ergebnis.

(ii) Das RK-Verfahren (2) soll (zusätzlich zu (i)) genau die Ordnung $\hat{p} = 1$ haben. Es fehlen noch die $\hat{b}_i$. Diese seien folgendermaßen festgelegt:

$$\hat{b}_1 = b_1\ , \qquad \hat{b}_2 = 0\ , \qquad \hat{b}_3 = b_2.\ ,$$

Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen an, die sich daraus an c_2 ergeben.

c) In dieser Aufgabe soll das Butchertableau auf dem beigefügten Blatt ausgefüllt werden. Es sei

$$c_2 = \frac{1}{3}\ .$$

Berechnen Sie die fehlenden Koeffizienten a_{ij}, b_i und $\hat{b}_i$ so, dass die Anforderungen und Festlegungen aus Teilaufgabe b) erfüllt sind.

d) Zur Berechnung des nächsten Integrationsschrittes, d.h. für y_2 und $\hat{y}_2$, wird obiges Schema mit den bereits berechneten Werten x_1 und y_1 anstelle von x_0 und y_0 durchgeführt.

Welchen algorithmischen Nutzen für den nächsten Integrationsschritt hat so eine Einbettung wie in Teilaufgabe b), bzw. worin besteht der Fehlbergtrick ?

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Butchertableau zu Aufgabe 3c):

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
1/3 & \square & & \\
\square & \square & \square & \\
\hline
 & \square & \square & 0 \\
\hline
 & \square & 0 & \square
\end{array}
$$

Aufgabe 4 *(8 P.)*

Bepunktung dieser Aufgabe:
Für jede der folgenden Multiple-Choice Fragen wird die richtige Lösung mit +2 Punkten bewertet, die falsche Lösung mit −2 Punkten und keine Antwort mit 0 Punkten. Die vergebenen positiven oder negativen Punkte werden zu einer Gesamtpunktzahl der Aufgabe summiert. Falls die Summe negativ ist wird die Aufgabe mit 0 Punkten bewertet. Die Gesamtpunktzahl der Aufgabe kann also nicht negativ werden.

Beantworten Sie die folgenden Fragen:

Die Keplersche Fassregel (Simpsonregel) benötigt 3 Stützstellen und ist exakt für alle Polynome dritten Grades. Kann man eine Quadraturformel konstruieren, die nur 2 Stützstellen benötigt, aber ebenfalls für alle Polynome dritten Grades exakt ist? ◯ Ja ◯ Nein

---

Das QR-Verfahren berechnet sämtliche Eigenwerte einer Matrix ◯ Ja ◯ Nein

---

Für $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ und $x \in \mathbb{C}^m$ mit $x \neq 0$ gilt:

$$\operatorname*{argmin}_{\lambda} \|x\lambda - Ax\|_2 = \frac{x^* A x}{x^* x}$$

◯ Ja ◯ Nein

Für Differenzialgleichungen mit glatter rechter Seite existieren für $k \geq 3$ konvergente k-Schrittverfahren der Ordnung $p = 2k$. ◯ Ja ◯ Nein