Modulprüfung MA2302 „Numerik“

10. August 2009
Prüfer: Prof. Dr. Bernd Simeon

Aufgabe 1 *Eine 1-Punkt Quadraturformel (ca. 9 P.)*

Es seien für $f \in C^\infty$

$$I(f) = \int_0^1 f(x) \cdot \sqrt{x}\, dx \qquad \text{und} \qquad J(f) = g \cdot f(s)\ .$$

Das gewichtete Integral $I(f)$ soll durch die Quadraturformel $J(f)$, welche mit nur einer Stützstelle s auskommt, möglichst gut approximiert werden.

a) Für Polynome welchen Grades kann diese Quadraturformel maximal exakt sein ? Wie müssen dazu das Gewicht g und die Stützstelle s gewählt werden ?

b) Leiten Sie eine Fehlerformel der Form

$$I(f) - J(f) = C \cdot f^{(p)}(\xi)$$

her. *Hinweis:* Taylorentwicklung von f um geeignete Stelle.

Im Folgenden wird speziell das Integral

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \sqrt{x}\, dx \approx 0.35762\ldots \tag{1}$$

betrachtet, d.h. $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

c) Approximieren Sie das Integral (1) mit Hilfe der Trapezregel und geben Sie den Fehler an.

d) Welchen Fehler können Sie nach Teilaufgabe b) für das Integral (1) erwarten, wenn man es mit der Quadraturformel J approximiert?

e) Ist im vorliegenden Fall die Approximation durch J im Vergleich zur Trapezregel tatsächlich genauer? Begründen Sie Ihre Aussage durch Zahlwerte.

Aufgabe 2 *Eigenwerte (ca. 12 P.)*

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Begründen Sie kurz, dass A nur reelle Eigenwerte hat.

b) Geben Sie ein kompaktes Intervall an, welches alle Eigenwerte von A enthält. Begründen Sie Ihr Resultat.

c) Sei $\mu \in \mathbb{R}$ beliebig. Welchen Rang hat die Matrix $A - \mu I$ mindestens ? Was folgt daraus für die geometrische Vielfachheit der Eigenwerte ?

Bitte wenden →

d) Die Matrix $A - 3I$ hat eine Zerlegung der Form

$$A - 3I = L \cdot D \cdot L^T \ .$$

Dabei ist L eine untere Dreiecksmatrix mit positiven Diagonalenelementen und D eine Diagonalmatrix mit Diagonalenelementen aus $\{-1, 0, 1\}$.

Berechnen Sie die Matrix D.

e) Wieviele Eigenwerte von A sind kleiner oder gleich 3? Beantworten Sie die Frage ohne die Eigenwerte zu berechnen, aber begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 *Williamsons Runge–Kutta Verfahren (ca. 11 P.)*

Betrachten Sie das Runge–Kutta Verfahren zu dem folgenden Butcher-Tableau:

$$\begin{array}{c|ccc}
c_1 & & & \\
c_2 & \frac{1}{3} & & \\
c_3 & -\frac{3}{16} & \frac{15}{16} & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{3}{10} & \frac{8}{15}
\end{array}$$

a) Das gegebene Verfahren ist anwendbar auf autonome Anfangswertprobleme. Erweitern Sie es nun *ohne Ordnungsverlust* so, dass es auch für nicht autonome Differentialgleichungen anwendbar ist, d.h. berechnen Sie die Koeffizienten c_i. Geben Sie nicht nur das Ergebnis sondern auch die bestimmenden Gleichungen an. Begründen sie außerdem genau, warum dabei die Ordnung erhalten bleibt.

b) Zeigen Sie, dass das Verfahren mindestens die Ordnung 2 besitzt[1].

Williamson[2] stellte das folgende Verfahren zur Lösung einer autonomen gewöhnlichen Differentialgleichung $y' = f(y)$ vor:

$$\begin{aligned}
q_1 &= hf(y_0) \\
z_1 &= y_0 + \alpha_1 q_1 \\
q_2 &= hf(z_1) + \beta_1 q_1 \\
z_2 &= z_1 + \alpha_2 q_2 \\
q_3 &= hf(z_2) + \beta_2 q_2 \\
y_1 &= z_2 + \alpha_3 q_3.
\end{aligned}$$

Wie üblich bezeichnet h die Schrittweite, y_0 die (approximierte) Lösung zu einem Punkt x_0 und y_1 die (approximierte) Lösung zum Punkt $x_0 + h$.

c) Zeigen Sie, dass es sich auch hier um ein explizites Runge–Kutta Verfahren handelt.

d) Geben Sie das Butcher–Tableau zu Williamsons Verfahren für den autonomen Fall an.

e) Mit

$$\alpha_1 = \frac{1}{3},\ \alpha_2 = \frac{15}{16},\ \alpha_3 = \frac{8}{15}, \qquad \beta_1 = -\frac{5}{9},\ \beta_2 = -\frac{153}{128}$$

ist Williamsons Verfahren äquivalent zu dem Verfahren aus den Teilaufgaben a) und b) (nicht zu zeigen). Williamson entwickelte sein Verfahren für hochdimensionale Probleme, d.h. $y \in \mathbb{R}^n$ mit sehr großem n. Wieso ist für solche Systeme das Williamson-Schema im Unterschied zum üblichen Runge–Kutta Schema besonders vorteilhaft? (Kurze Begründung reicht).

---

[1] tatsächlich ist es ein Verfahren dritter Ordnung, das ist aber nicht zu zeigen

[2] J. H. Williamson, J. Comput. Phys., 35:48–56, 1980

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Aufgabe 4 *(8 P.)*

Bepunktung dieser Aufgabe:
Für jede der folgenden Multiple-Choice Fragen wird die richtige Lösung mit +2 Punkten bewertet, die falsche Lösung mit −2 Punkten und keine Antwort mit 0 Punkten. Die vergebenen positiven oder negativen Punkte werden zu einer Gesamtpunktzahl der Aufgabe summiert. Falls die Summe negativ ist wird die Aufgabe mit 0 Punkten bewertet. Die Gesamtpunktzahl der Aufgabe kann also nicht negativ werden.

Beantworten Sie die folgenden Fragen:

Hessenberg-Matrizen sind günstig für numerische Eigenwertlöser ◯ Ja ◯ Nein

---

Jedes konsistente und stabile Mehrschrittverfahren ist konvergent. ◯ Ja ◯ Nein

---

Es gibt eine Folge (p_n) von Polynomen p_n, wobei p_n Grad n besitzt, so dass

$$\int_0^\pi p_n(x)p_{2n}(x)\,dx = 0$$

für alle $n > 1$ gilt. ◯ Ja ◯ Nein

Betrachten Sie das Runge–Kutta Verfahren zu dem Butcher–Tableau

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Es sei $\alpha, \beta, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Wenn das obige Verfahren auf

$$y' = \alpha x + \beta, \qquad y(x_0) = y_0$$

angewendet wird, dann gilt

$$y_i = y(x_i)$$

für jede Schrittweite. ◯ Ja ◯ Nein