PROF. DR. BERND SIMEON
CHRISTIAN GOBERT
THOMAS MÄRZ

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Numerik

SS 2009

Hausaufgabenblatt 2
Abgabe: in den Übungen vom 17.6. oder 18.6.

Aufgabe 1: *(Sylvestergleichung)*

Es seien $A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gegeben. Die Sylvestergleichung für $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ lautet

$$AX - XB = C \tag{1}$$

und kann mit den Schurzerlegungen von A, B

$$A = URU^H \quad , \quad B = VSV^H$$

auf die Form

$$RY - YS = D \tag{2}$$

gebracht werden, wobei $D = U^H CV$ und $Y = U^H XV$.

a) Finden Sie einen Algorithmus zur Berechnung von Y.

   Hinweis: Schreiben Sie Gleichung (2) als n Gleichungen für die Spaltenvektoren.

b) Zeigen Sie: Gleichung (1) ist genau dann eindeutig lösbar, falls

$$\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$$

   gilt, also die Spektren der Matrizen A und B disjunkt sind.

c) **Dieser Teil ist optional !**
   Implementieren Sie einen Algorithmus zur Lösung von Gleichung (1). Wie viele Operationen benötigt er ?

   Hinweis: Matlab bietet die Funktion `schur`, Sie benötigt $O(n^3)$ Operationen.

Aufgabe 2: *(Rayleighquotient)*

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $(\lambda, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ ein Rechtseigenpaar von A. Zeigen Sie für den Rayleighquotienten

$$r(x, A) = \frac{x^H Ax}{x^H x}$$

folgende Störungseigenschaften:

a) $r(x + h, A) - r(x, A) = O(\|h\|)$, für $\|h\| \to 0$,

b) $r(x + h, A) - r(x, A) = O(\|h\|^2)$, für $\|h\| \to 0$, falls A normal ist.

Aufgabe 3: *(Rayleighquotienteniteration)*

Betrachten Sie folgenden Algorithmus zur Eingabe $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $0 \neq v_0 \in \mathbb{C}^n$, $\mu_0 \in \mathbb{C}$:

$$
\begin{array}{l}
\texttt{for } k = 1, 2, \ldots \\
\quad \texttt{solve for } w : (\mu_{k-1} I - A) w = v_{k-1} \\
\quad v_k := w / \|w\| \\
\quad \mu_k := v_k^H A v_k \\
\texttt{end}
\end{array}
$$

a) Zeigen Sie, dass für normales $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit den reellen Eigenwerten $\lambda_1 > \lambda_2$ gilt: Falls obiger Algorithmus konvergiert, dann konvergiert v_k kubisch gegen einen Eigenvektor von A.

   Hinweise:

   (a) Nutzen Sie die Diagonalisierbarkeit von A um die Iteration in eine einfachere für die Vektoren $\hat{v}_k$, $\hat{w}$ zu transformiern.

   (b) Sie dürfen ohne Einschräkung annehmen, dass die Folge der v_k gegen einen Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 konvergiert.
   Wogegen konvergiert dann die Folge der $\hat{v}_k$?

   (c) Bezeichne α_k, β_k die Komponenten von $\hat{v}_k$:

   $$\hat{v}_k =: (\alpha_k, \beta_k)^T \quad \text{und} \quad h_k := \frac{|\beta_k|}{|\alpha_k|}$$

   bezeichne das Verhältnis der Komponenten. Stellen Sie h_k in Abhängigkeit von h_{k-1} dar indem Sie α_k, β_k, μ_{k-1} durch α_{k-1}, β_{k-1} ausdrücken. Treffen Sie geeignete Annahmen über α_0, β_0 und μ_0.

   (d) Zeigen Sie, dass die Konvergenzgeschwindigkeit des Algorithmus' durch die Konvergenzgeschwindigkeit der h_k gegeben ist.

b) **Dieser Teil ist optional !**
   Implementieren Sie obigen Algorithmus. Testen Sie Ihre Implementierung z.B. an einer normalen Matrix $A \in \mathbb{C}^{100\times 100}$ und stellen Sie die Konvergenz der Folgen μ_k für verschiedene Startwerte μ_0 graphisch dar.

Die Aufgaben auf diesem Blatt sind Hausaufgaben, d.h. die Aufgaben werden in den Übungen nicht besprochen. Die Aufgaben können zu dritt bearbeitet werden. Bitte reichen Sie Ihre Lösungen in den Übungen vom 17.6. oder 18.6. bei Ihrem Tutor ein.