PROF. DR. BERND SIMEON
CHRISTIAN GOBERT
THOMAS MÄRZ

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Numerik

SS 2009

Hausaufgabenblatt 1
Abgabe: in den Übungen vom 3.6. oder 4.6.

Aufgabe 1 *Links- und Rechtseigenpaare*
Definition:
Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.
Ein Vektor $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$ heißt (Rechts-)eigenvektor von A, falls es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ gibt mit $Ax = \lambda x$. In diesem Fall heißt (λ, x) (Rechts-)eigenpaar.
Ein Vektor $0 \neq y \in \mathbb{C}^n$ heißt Linkseigenvektor von A, falls es ein $\mu \in \mathbb{C}$ gibt mit $y^* A = \mu y^*$, dabei bedeutet $y^* = y^H = \overline{y}^T$. In diesem Fall heißt (μ, y) Linkseigenpaar.

(a) Zu jedem Rechtseigenpaar (λ, x) gibt es ein Linkseigenpaar (λ, y) und umgekehrt. Warum?

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet im Folgenden das euklid. Skalarprodukt.

(b) Sei (λ, y) ein Linkseigenpaar und (μ, x) ein Rechtseigenpaar von A. Zeigen Sie: $x \perp y$, also $\langle x, y \rangle = 0$, falls $\lambda \neq \mu$.

(c) Sei λ ein einfacher Eigenwert von A. (λ, x) ein Rechts- und (λ, y) ein Linkseigenpaar. Zeigen Sie: $\langle x, y \rangle \neq 0$.

(d) Ist A obere Dreiecksmatrix und normal, so ist A eine Diagonalmatrix.

(e) Sei (λ, x) ein Rechtseigenpaar von A. Ist A normal, dann ist (λ, x) auch ein Linkseigenpaar.

Aufgabe 2 *Givens-Rotationen*
Givens-Rotationen sind orthogonale Transformationen, die sukzessive die QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ berechnen. Givens-Rotationen werden als Reduktionsalgorithmen zur Lösung von Eigenwertproblemen herangezogen. Die Idee ist ähnlich der Reduktion durch Householder-Reflexionen (vgl. Skript). In dieser Aufgabe wird die Technik der Givens-Rotationen erarbeitet.

a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $R \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ so, dass RA obere Dreiecksmatrix ist.

b) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & * & * & * \\ a_{k,1} & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so, dass RA die folgende Gestalt hat:

$$RA = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

c) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * & * \\ \vdots & \ddots & a_{k,k} & \vdots & \vdots \\ & & 0 & * & * \\ & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & 0 & * & * \\ & & a_{k+l,k} & * & * \\ & & 0 & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so, dass RA die folgende Gestalt hat:

$$RA = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * & * \\ \vdots & \ddots & * & \vdots & \vdots \\ & & 0 & * & * \\ & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & 0 & * & * \\ & & 0 & * & * \\ & & 0 & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

d) Die Transformationen aus den Aufgaben a) bis c) werden Givens-Rotationen genannt. Formulieren Sie einen Algorithmus, der für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ durch Givens-Rotationen sukzessive die QR-Zerlegung berechnet.

e) Wieso heißen diese Transformationen Rotationen?

Die Aufgaben auf diesem Blatt sind Hausaufgaben, d.h. die Aufgaben werden in den Übungen nicht besprochen. Die Aufgaben können zu dritt bearbeitet werden. Bitte reichen Sie Ihre Lösungen in den Übungen vom 3.6. oder 4.6. bei Ihrem Tutor ein.