PROF. DR. BERND SIMEON
CHRISTIAN GOBERT
THOMAS MÄRZ

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Numerik

SS 2009

Zu Programmieraufgabe 2

Hamilton-Funktion für N Planeten

Wir betrachten ein System bestehend aus einer Sonne und N Planeten. Dabei bezeichne m_0, q_0 Masse und Ort der Sonne und m_i, q_i für $i \in \{1, \ldots, N\}$ Massen und Orte der Planeten. Wir nehmen weiterhin an, dass ein Koordinatensystem vorhanden ist, welches die Sonne als Ursprung hat und in dem die Sonne ruht, d.h. $q_0 \equiv 0$. Die Orte der Planeten $q_i(t)$ sind Funktionen der Zeit t.

Wir verwenden im weiteren drei Zusammenhänge aus der Physik.

1. Jedem Objekt ist ein Impuls $p_i(t)$ zugeordnet, dieser ergibt sich aus Masse $\times$ Geschwindigkeit:
$$p_i = m_i v_i = m_i \dot{q}_i \,.$$
Bemerkung: Für die Sonne gilt dann $p_i \equiv 0$.

2. Die resultierende Kraft F_i am Objekt i ist die Summe aller einzelnen angreifenden Kräfte. Hier wird ein einzelner Planet i von der Sonne und allen anderen beteiligten Planenten $k \in \{1, \ldots, N\} \setminus \{i\}$ nach dem Gravitationsgesetz angezogen. Ein am Objekt i angreifende einzelne Kraft $F_{i,k}$ ist dabei gegeben durch
$$F_{i,k} = G m_i m_k \frac{q_k - q_i}{\|q_k - q_i\|^3} \,, \qquad \Rightarrow \qquad F_i = \sum_{k=0, k\neq i}^{N} F_{i,k} \,.$$
Bemerkung: G bezeichnet die Gravitationskonstante.

3. Nach Newton ist die resultierende Kraft gerade die Impulsänderung
$$\dot{p}_i = F_i \,.$$

Damit stellen wir sukzessive die DG-Systeme auf

1. Fall: Sonne mit m_0, $q_0 \equiv 0$, $p_0 \equiv 0$ und dazu ein Planet mit m_1,q_1,p_1
$$\dot{q}_1 = \frac{1}{m_1} p_1 \,,$$
$$\dot{p}_1 = F_1 = \sum_{k=0, k\neq 1}^{1} F_{1,k} = F_{1,0} = G m_1 m_0 \frac{q_0 - q_1}{\|q_0 - q_1\|} = -G m_1 m_0 \frac{q_1}{\|q_1\|^3} \,.$$
Die erste DG stammt aus der Impulsbeziehung, die zweite DG aus dem Kraftgesetz wobei der Planet nur von der Sonne beeinflusst wird.

2. Fall: Sonne mit m_0, $q_0 \equiv 0$, $p_0 \equiv 0$ und dazu zwei Planeten mit m_1,q_1,p_1 und m_2,q_2,p_2.

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= \frac{1}{m_1} p_1 \,, \\
\dot{p}_1 &= -Gm_1m_0 \frac{q_1}{\|q_1\|^3} + F_{1,2} = -Gm_1m_0 \frac{q_1}{\|q_1\|^3} + Gm_1m_2 \frac{q_2 - q_1}{\|q_2 - q_1\|^3} \,, \\
\dot{q}_2 &= \frac{1}{m_2} p_2 \,, \\
\dot{p}_2 &= -Gm_2m_0 \frac{q_2}{\|q_2\|^3} + F_{2,1} = -Gm_2m_0 \frac{q_2}{\|q_2\|^3} + Gm_2m_1 \frac{q_1 - q_2}{\|q_1 - q_2\|^3} \,.
\end{aligned}$$

Üblicherweise werden die Gleichungen dann umsortiert zu

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= \frac{1}{m_1} p_1 \,, \\
\dot{q}_2 &= \frac{1}{m_2} p_2 \,, \\
\dot{p}_1 &= -Gm_1m_0 \frac{q_1}{\|q_1\|^3} + F_{1,2} = -Gm_1m_0 \frac{q_1}{\|q_1\|^3} + Gm_1m_2 \frac{q_2 - q_1}{\|q_2 - q_1\|^3} \,, \\
\dot{p}_2 &= -Gm_2m_0 \frac{q_2}{\|q_2\|^3} + F_{1,2} = -Gm_2m_0 \frac{q_2}{\|q_2\|^3} + Gm_2m_1 \frac{q_1 - q_2}{\|q_1 - q_2\|^3} \,.
\end{aligned}$$

Weiterhin führt man "gesammelte" Vektoren ein $p = (p_1^T, p_2^T)^T$ und $q = (q_1^T, q_2^T)^T$ um später $\dot{q} = \partial_p H(q,p)$ und $\dot{p} = -\partial_q H(q,p)$ schreiben zu können.

Man sieht, dass die Vorgehensweise ein Update-Prinzip für das Hinzufügen eines Planeten hat. Man hat die alten Gleichungen und fügt dort die Wirkung des neuen Planeten auf die alten hinzu. Die zwei neuen Gleichungen für den neuen Planeten beinhalten dessen Impuls und die Wirkung der alten Planeten und der Sonne auf den neuen Planenten. Man beachte dabei die Vorzeichen, also die Wirkrichtung gegeben durch $q_k - q_i$.

3. Fall: Sonne mit m_0, $q_0 \equiv 0$, $p_0 \equiv 0$ und dazu drei Planeten mit m_1,q_1,p_1, m_2,q_2,p_2 und m_3,q_3,p_3. Selbes Spiel nochmal, aber gleich umsortiert:

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= \frac{1}{m_1} p_1 \,, \\
\dot{q}_2 &= \frac{1}{m_2} p_2 \,, \\
\dot{q}_3 &= \frac{1}{m_2} p_3 \,, \\
\dot{p}_1 &= -Gm_1m_0 \frac{q_1}{\|q_1\|^3} + Gm_1m_2 \frac{q_2 - q_1}{\|q_2 - q_1\|^3} + Gm_1m_3 \frac{q_3 - q_1}{\|q_3 - q_1\|^3} \,, \\
\dot{p}_2 &= -Gm_2m_0 \frac{q_2}{\|q_2\|^3} + Gm_2m_1 \frac{q_1 - q_2}{\|q_1 - q_2\|^3} + Gm_2m_3 \frac{q_3 - q_2}{\|q_3 - q_2\|^3} \,, \\
\dot{p}_3 &= -Gm_3m_0 \frac{q_3}{\|q_3\|^3} + Gm_3m_1 \frac{q_1 - q_3}{\|q_1 - q_3\|^3} + Gm_3m_2 \frac{q_2 - q_3}{\|q_2 - q_3\|^3} \,.
\end{aligned}$$

Die allgemeine Struktur für $N > 3$ Planeten sollte damit klar sein.

Bisher haben wir die Differentialgleichungen. Damit man zu einem Anfangswertproblem kommt, muss man nur noch Startort $q_{i,s}$ und Startimpuls $p_{i,s}$ für jeden Planeten $i \in \{1, \ldots, N\}$ spezifieren.

Das so entstandene System ist ein Hamiltonsystem, es fehlt nur doch die Hamiltonfunktion. Mit den Stammfunktionen (für einen Planeten i mit q_i, p_i)

$$
\begin{aligned}
G(q_i, p_i) &= \frac{p_i^T p_i}{2m_i} \quad \Rightarrow & \partial_{q_i} G(q_i, p_i) &= 0 & \partial_{p_i} G(q_i, p_i) &= \frac{1}{m_i} p_i \\
G_{i,0}(q_i, p_i) &= G m_0 m_i \frac{1}{\|q_i\|} \quad \Rightarrow & \partial_{q_i} G_{i,0}(q_i, p_i) &= -G m_0 m_i \frac{q_i}{\|q_i\|^3} & \partial_{p_i} G_{i,0}(q_i, p_i) &= 0 \\
G_{i,k}(q_i, p_i) &= G m_k m_i \frac{1}{\|q_k - q_i\|} \quad \Rightarrow & \partial_{q_i} G_{i,k}(q_i, p_i) &= G m_k m_i \frac{q_k - q_i}{\|q_k - q_i\|^3} & \partial_{p_i} G_{i,k}(q_i, p_i) &= 0
\end{aligned}
$$

und mit den "gesammelten" Vektoren $p = (p_1^T, \ldots, p_N^T)^T$ und $q = (q_1^T, \ldots, q_N^T)^T$ haben wir dann für die obigen drei Situationen

1. Fall: $q = q_1$, $p = p_1$
$$H(q, p) = \frac{p_1^T p_1}{2m_1} - G m_0 m_1 \frac{1}{\|q_1\|} \ .$$

2. Fall: $q = (q_1^T, q_2^T)^T$, $p = (p_1^T, p_2^T)^T$
$$H(q, p) = \frac{p_1^T p_1}{2m_1} + \frac{p_2^T p_2}{2m_2} - G \left(m_0 m_1 \frac{1}{\|q_1\|} + m_0 m_2 \frac{1}{\|q_2\|} + m_1 m_2 \frac{1}{\|q_1 - q_2\|} \right) \ .$$

3. Fall: $q = (q_1^T, q_2^T, q_3^T)^T$, $p = (p_1^T, p_2^T, p_3^T)^T$
$$
\begin{aligned}
H(q, p) =& \frac{p_1^T p_1}{2m_1} + \frac{p_2^T p_2}{2m_2} + \frac{p_3^T p_3}{2m_3} \\
& - G \left(m_0 m_1 \frac{1}{\|q_1\|} + m_0 m_2 \frac{1}{\|q_2\|} + m_0 m_3 \frac{1}{\|q_3\|} + m_1 m_2 \frac{1}{\|q_1 - q_2\|} \right. \\
& \left. + m_2 m_3 \frac{1}{\|q_2 - q_3\|} + m_1 m_3 \frac{1}{\|q_1 - q_3\|} \right) \ .
\end{aligned}
$$

Im allgemeinen Fall haben wir

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^T p_i}{2m_i} - G \left(\sum_{i=1}^{N} m_0 m_i \frac{1}{\|q_i\|} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{i-1} m_k m_i \frac{1}{\|q_k - q_i\|} \right) \ .$$

Übung: Nachrechnen, dass H tatsächlich Hamiltonfunktion ist.