PROF. DR. BERND SIMEON
CHRISTIAN GOBERT
THOMAS MÄRZ

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Numerik

SS 2009

Lösungsvorschläge zu Übungsblatt 7

Aufgabe 1: *ODEs: Rechte Seite als diskrete Funktion*

Die rechte Seite einer autonomen Differentialgleichung sei in diskreter Form gegeben, d.h. $f(y_i)$ sei an einzelnen, fest vorgegebenen Stützstellen y_i gegeben. $f(y_i)$ sind z.B. Messdaten. Das den Daten zugrunde liegende Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(y), \qquad y(x_0) = y_0$$

kann also nicht gelöst werden, da der Verlauf von f zwischen den Stützstellen y_i unbekannt ist.
Zur Lösung des Problems nehme man einen Verlauf von f zwischen den Stützstellen an, d.h. man betrachte das Problem

$$\hat{y}'(x) = \hat{f}(\hat{y}), \qquad \hat{y}(x_0) = y_0.$$

wobei $\hat{f}$ dieselben Glattheitsvoraussetzungen wie f erfülle, in den Stützstellen y_i identisch mit f (d.h. $\hat{f}(y_i) = f(y_i)$), aber sonst beliebig sei.
Schätzen Sie nun ab, wie stark die Lösung $\hat{y}$ in einem beliebigen Punkt $x > x_0$ von der exakten Lösung y abweicht, d.h. schätzen Sie $\|y(x) - \hat{y}(x)\|$ für $x > x_0$ ab. Treffen Sie dazu geeignete (möglichst schwache) Voraussetzungen an f bzw. $\hat{f}$ und geben Sie diese explizit an.

Lösung:
Die Aufgabe kann mit dem Lemma von Gronwall und der Restgliedformel zur Polynominterpolation gelöst werden. Dazu nehme man an, dass $f \in C^n$ sei. Für $n \geq 1$ ist f damit auch lokal Lipschitz-stetig. Für $\hat{f}$ gelten diese Voraussetzungen also auch.
Für jedes $y \in \mathbb{R}$ kann f durch ein Interpolationspolynom p approximiert werden. In Abhängigkeit von y wähle man dazu $n+1$ Stützstellen $y_k, y_{k+1}, \ldots, y_{k+n}$, die in der Umgebung von y liegen und lege ein Interpolationspolynom p durch $(y_k, f(y_k)), \ldots, (y_{k+n}, f(y_{k+n}))$,

$$p(y_i) \;=\; f(y_i), \qquad i = k, \ldots, k+n-2 \tag{1}$$

$$f(y) - p(y) \;=\; \omega_n(y)\frac{f^{(n)}(\eta)}{n!} \tag{2}$$

Ebenso gilt

$$\hat{f}(y) - p(y) = \omega_n(y)\frac{\hat{f}^{(n)}(\hat{\eta})}{n!}$$

Damit ist

$$\hat{y}'(x) = f(\hat{y}) + \omega_n(\hat{y})\frac{\hat{f}^{(n)}(\eta) - f^{(n)}(\eta)}{n!}$$

Jetzt haben wir das Problem auf die Form „gestörte rechte Seite" gebracht (vgl. Skript, S. 65). Wie im Skript setzen wir jetzt das Lemma von Gronwall ein mit und erhalten

$$\|y(x) - \hat{y}(x)\| \leq \|\omega_n\|_\infty \frac{\|\hat{f}^{(n)} - f^{(n)}\|_\infty}{L\, n!} \left(e^{L(x-x_0)} - 1\right).$$

L bezeichnet die Lipschitzkonstante von f (wenn man's ganz genau machen will, muss man noch auf die Lokalität der Lipschitzbedingung eingehen...).

Aufgabe 2: *Konsistenzordnung von Einschrittverfahren*

Geben Sie für $y' = f(x,y) \in \mathbb{R}^n$ die Taylor-Entwicklung von f und y um x_0 bis zum quadratischen Glied an.
Gegeben seien nun die drei Einschrittverfahren für das Anfangswertproblem $y' = f(x,y)$:

i) expliziter Euler: $u_1 = u_0 + hf(x_0, u_0)$

ii) expliziter Euler mit halber Schrittweite:

$$v_{1/2} = v_0 + h/2 \cdot f(x_0, v_0), \qquad v_1 = v_{1/2} + h/2 \cdot f(x_0 + h/2, v_{1/2})$$

iii) modifiziertes Euler-Verfahren nach Collatz: $w_1 = w_0 + hf(x_0 + h/2, w_0 + h/2 \cdot f(x_0, w_0))$.

a) Man bestimme die Konsistenzordnung p der Verfahren (i) und (ii). Welche Beziehung gilt zwischen dem jeweils führenden Term des Diskretisierungsfehlers $\tau(h)$ von (i) und (ii)?

b) Man zeige: $w_1 = 2v_1 - u_1$ für $u_0 = v_0 = w_0 = y_0$. Was folgt daraus für die Konsistenzordnung des modifizierten Euler-Verfahrens (iii)?

c) Wie lassen sich die Verfahren (i), (ii) und (iii) geometrisch veranschaulichen?

Lösung:
Der erste Aufgabenteil sollte keine Musterlösung benötigen...

a) Zunächst benötigen wir die Taylorentwicklung der exakten Lösung. Diese lautet

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_0) + \frac{1}{6}h^3 y'''(x_0) + O(h^4).$$

Genauso entwickeln wir nun die numerische Lösung in eine Taylorreihe und erhalten für das explizite Euler-Verfahren

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + hf(x_0, u_0) \\ &= u_0 + hy'(x_0). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Differenz $y(x_0 + h) - u_1$ wegen $u_0 = y(x_0)$ die Beziehung

$$y(x_0 + h) - u_1 = \frac{1}{2}h^2 y''(x_0) + O(h^3), \quad \tau(h) = \frac{y(x_0 + h) - u_1}{h} = \frac{1}{2}hy''(x_0) + O(h^2),$$

und somit die Ordnung 1.

Analog berechnen wir die Taylorentwicklung von v_1 zu

$$\begin{aligned}
v_1 &= v_0 + \frac{1}{2}hf(x_0, v_0) + \frac{1}{2}hf(x_0 + \frac{1}{2}h, v_0 + \frac{1}{2}hf(x_0, v_0)) \\
&= v_0 + \frac{1}{2}hy'(x_0) + \frac{1}{2}h\left[f(x_0, v_0) + \frac{1}{2}hf_x(x_0, v_0) + \frac{1}{2}hf(x_0, v_0)f_y(x_0, v_0) + O(h^2)\right],
\end{aligned}$$

wobei in der zweiten Zeile die zweidimensionale Taylorentwicklung von f gebildet wird. Wegen

$$y'' = f_x + ff_y$$

folgt

$$y(x_0 + h) - v_1 = \frac{1}{4}h^2y''(x_0) + O(h^3)$$

und damit wiederum Ordnung 1 für das explizite Euler-Verfahren mit halber Schrittweite. Der führende Term hat sich hier aufgrund der halben Schrittweite **halbiert**.

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
2v_1 - u_1 &= 2\left[v_0 + \frac{1}{2}hf(x_0, v_0) + \frac{1}{2}hf(x_0 + \frac{1}{2}h, v_0 + \frac{1}{2}hf(x_0, v_0))\right] - u_0 - hf(x_0, v_0) \\
&= v_0 + hf(x_0 + \frac{1}{2}h, v_0 + \frac{1}{2}hf(x_0, v_0)).
\end{aligned}$$

Damit gilt für die Differenz zur exakten Lösung

$$\begin{aligned}
y(x_0 + h) - w_1 &= y(x_0 + h) - 2v_1 + u_1 \\
&= y(x_0 + h) - v_1 + u_1 - v_1 \\
&= \frac{1}{4}h^2y''(x_0) - \frac{1}{4}h^2y''(x_0) + O(h^3) \\
&= O(h^3),
\end{aligned}$$

also Ordnung 2 für das modifizierte Eulerverfahren nach Collatz.

c)

Expliziter Euler h **Expliziter Euler h/2** **Modifizierter Euler nach Collatz**