

## Numerik

SS 2009

### Lösungsvorschläge zu Übungsblatt 7

#### Aufgabe 1: ODEs: Rechte Seite als diskrete Funktion

Die rechte Seite einer autonomen Differentialgleichung sei in diskreter Form gegeben, d.h.  $f(y_i)$  sei an einzelnen, fest vorgegebenen Stützstellen  $y_i$  gegeben.  $f(y_i)$  sind z.B. Messdaten. Das den Daten zugrunde liegende Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(y), \quad y(x_0) = y_0$$

kann also nicht gelöst werden, da der Verlauf von  $f$  zwischen den Stützstellen  $y_i$  unbekannt ist.

Zur Lösung des Problems nehme man einen Verlauf von  $f$  zwischen den Stützstellen an, d.h. man betrachte das Problem

$$\hat{y}'(x) = \hat{f}(\hat{y}), \quad \hat{y}(x_0) = y_0.$$

wobei  $\hat{f}$  dieselben Glattheitsvoraussetzungen wie  $f$  erfülle, in den Stützstellen  $y_i$  identisch mit  $f$  (d.h.  $\hat{f}(y_i) = f(y_i)$ ), aber sonst beliebig sei.

Schätzen Sie nun ab, wie stark die Lösung  $\hat{y}$  in einem beliebigen Punkt  $x > x_0$  von der exakten Lösung  $y$  abweicht, d.h. schätzen Sie  $\|y(x) - \hat{y}(x)\|$  für  $x > x_0$  ab. Treffen Sie dazu geeignete (möglichst schwache) Voraussetzungen an  $f$  bzw.  $\hat{f}$  und geben Sie diese explizit an.

#### Lösung:

Die Aufgabe kann mit dem Lemma von Gronwall und der Restgliedformel zur Polynominterpolation gelöst werden. Dazu nehme man an, dass  $f \in C^n$  sei. Für  $n \geq 1$  ist  $f$  damit auch lokal Lipschitz-stetig. Für  $\hat{f}$  gelten diese Voraussetzungen also auch.

Für jedes  $y \in \mathbb{R}$  kann  $f$  durch ein Interpolationspolynom  $p$  approximiert werden. In Abhängigkeit von  $y$  wähle man dazu  $n + 1$  Stützstellen  $y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+n}$ , die in der Umgebung von  $y$  liegen und lege ein Interpolationspolynom  $p$  durch  $(y_k, f(y_k)), \dots, (y_{k+n}, f(y_{k+n}))$ ,

$$p(y_i) = f(y_i), \quad i = k, \dots, k + n - 2 \quad (1)$$

$$f(y) - p(y) = \omega_n(y) \frac{f^{(n)}(\eta)}{n!} \quad (2)$$

Ebenso gilt

$$\hat{f}(y) - p(y) = \omega_n(y) \frac{\hat{f}^{(n)}(\hat{\eta})}{n!}$$

Damit ist

$$\hat{y}'(x) = f(\hat{y}) + \omega_n(\hat{y}) \frac{\hat{f}^{(n)}(\hat{\eta}) - f^{(n)}(\eta)}{n!}$$

Jetzt haben wir das Problem auf die Form „gestörte rechte Seite“ gebracht (vgl. Skript, S. 65). Wie im Skript setzen wir jetzt das Lemma von Gronwall ein mit und erhalten

$$\|y(x) - \hat{y}(x)\| \leq \|\omega_n\|_\infty \frac{\|\hat{f}^{(n)} - f^{(n)}\|_\infty}{L n!} \left( e^{L(x-x_0)} - 1 \right).$$

$L$  bezeichnet die Lipschitzkonstante von  $f$  (wenn man's ganz genau machen will, muss man noch auf die Lokalität der Lipschitzbedingung eingehen...).

### Aufgabe 2: Konsistenzordnung von Einschrittverfahren

Geben Sie für  $y' = f(x, y) \in \mathbb{R}^n$  die Taylor-Entwicklung von  $f$  und  $y$  um  $x_0$  bis zum quadratischen Glied an.

Gegeben seien nun die drei Einschrittverfahren für das Anfangswertproblem  $y' = f(x, y)$ :

i) expliziter Euler:  $u_1 = u_0 + hf(x_0, u_0)$

ii) expliziter Euler mit halber Schrittweite:

$$v_{1/2} = v_0 + h/2 \cdot f(x_0, v_0), \quad v_1 = v_{1/2} + h/2 \cdot f(x_0 + h/2, v_{1/2})$$

iii) modifiziertes Euler-Verfahren nach Collatz:  $w_1 = w_0 + hf(x_0 + h/2, w_0 + h/2 \cdot f(x_0, w_0))$ .

- Man bestimme die Konsistenzordnung  $p$  der Verfahren (i) und (ii). Welche Beziehung gilt zwischen dem jeweils führenden Term des Diskretisierungsfehlers  $\tau(h)$  von (i) und (ii)?
- Man zeige:  $w_1 = 2v_1 - u_1$  für  $u_0 = v_0 = w_0 = y_0$ . Was folgt daraus für die Konsistenzordnung des modifizierten Euler-Verfahrens (iii)?
- Wie lassen sich die Verfahren (i), (ii) und (iii) geometrisch veranschaulichen?

### Lösung:

Der erste Aufgabenteil sollte keine Musterlösung benötigen...

a) Zunächst benötigen wir die Taylorentwicklung der exakten Lösung. Diese lautet

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{1}{2}h^2y''(x_0) + \frac{1}{6}h^3y'''(x_0) + O(h^4).$$

Genauso entwickeln wir nun die numerische Lösung in eine Taylorreihe und erhalten für das explizite Euler-Verfahren

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + hf(x_0, u_0) \\ &= u_0 + hy'(x_0). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Differenz  $y(x_0 + h) - u_1$  wegen  $u_0 = y(x_0)$  die Beziehung

$$y(x_0 + h) - u_1 = \frac{1}{2}h^2y''(x_0) + O(h^3), \quad \tau(h) = \frac{y(x_0 + h) - u_1}{h} = \frac{1}{2}hy''(x_0) + O(h^2),$$

und somit die Ordnung 1.

Analog berechnen wir die Taylorentwicklung von  $v_1$  zu

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 + \frac{1}{2}hf(x_0, v_0) + \frac{1}{2}hf(x_0 + \frac{1}{2}h, v_0 + \frac{1}{2}hf(x_0, v_0)) \\ &= v_0 + \frac{1}{2}hy'(x_0) + \frac{1}{2}h \left[ f(x_0, v_0) + \frac{1}{2}hf_x(x_0, v_0) + \frac{1}{2}hf(x_0, v_0)f_y(x_0, v_0) + O(h^2) \right], \end{aligned}$$

wobei in der zweiten Zeile die zweidimensionale Taylorentwicklung von  $f$  gebildet wird. Wegen

$$y'' = f_x + ff_y$$

folgt

$$y(x_0 + h) - v_1 = \frac{1}{4}h^2y''(x_0) + O(h^3)$$

und damit wiederum Ordnung 1 für das explizite Euler-Verfahren mit halber Schrittweite. Der führende Term hat sich hier aufgrund der halben Schrittweite **halbiert**.

b) Es gilt

$$\begin{aligned} 2v_1 - u_1 &= 2 \left[ v_0 + \frac{1}{2}hf(x_0, v_0) + \frac{1}{2}hf(x_0 + \frac{1}{2}h, v_0 + \frac{1}{2}hf(x_0, v_0)) \right] - u_0 - hf(x_0, v_0) \\ &= v_0 + hf(x_0 + \frac{1}{2}h, v_0 + \frac{1}{2}hf(x_0, v_0)). \end{aligned}$$

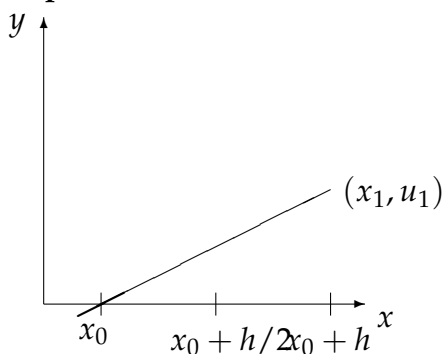
Damit gilt für die Differenz zur exakten Lösung

$$\begin{aligned} y(x_0 + h) - w_1 &= y(x_0 + h) - 2v_1 + u_1 \\ &= y(x_0 + h) - v_1 + u_1 - v_1 \\ &= \frac{1}{4}h^2y''(x_0) - \frac{1}{4}h^2y''(x_0) + O(h^3) \\ &= O(h^3), \end{aligned}$$

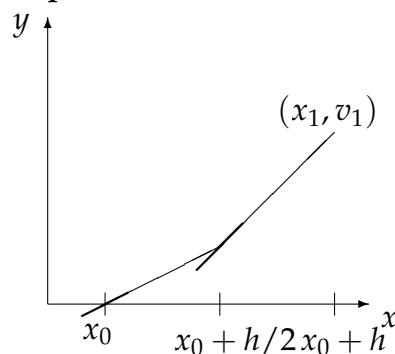
also Ordnung 2 für das modifizierte Eulerverfahren nach Collatz.

c)

**Expliziter Euler h**



**Expliziter Euler h/2**



**Modifizierter Euler nach Collatz**

