PROF. DR. BERND SIMEON
CHRISTIAN GOBERT
THOMAS MÄRZ

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Numerik

SS 2009

Übungsblatt 7

Aufgabe 1: *ODEs: Rechte Seite als diskrete Funktion*

Die rechte Seite einer autonomen Differentialgleichung sei in diskreter Form gegeben, d.h. $f(y_i)$ sei an einzelnen, fest vorgegebenen Stützstellen y_i gegeben. $f(y_i)$ sind z.B. Messdaten. Das den Daten zugrunde liegende Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(y), \qquad y(x_0) = y_0$$

kann also nicht gelöst werden, da der Verlauf von f zwischen den Stützstellen y_i unbekannt ist.
Zur Lösung des Problems nehme man einen Verlauf von f zwischen den Stützstellen an, d.h. man betrachte das Problem

$$\hat{y}'(x) = \hat{f}(\hat{y}), \qquad \hat{y}(x_0) = y_0.$$

wobei $\hat{f}$ dieselben Glattheitsvoraussetzungen wie f erfülle, in den Stützstellen y_i identisch mit f (d.h. $\hat{f}(y_i) = f(y_i)$), aber sonst beliebig sei.
Schätzen Sie nun ab, wie stark die Lösung $\hat{y}$ in einem beliebigen Punkt $x > x_0$ von der exakten Lösung y abweicht, d.h. schätzen Sie $\|y(x) - \hat{y}(x)\|$ für $x > x_0$ ab. Treffen Sie dazu geeignete (möglichst schwache) Voraussetzungen an f bzw. $\hat{f}$ und geben Sie diese explizit an.

Aufgabe 2: *Konsistenzordnung von Einschrittverfahren*

Geben Sie für $y' = f(x,y) \in \mathbb{R}^n$ die Taylor-Entwicklung von f und y um x_0 bis zum quadratischen Glied an.
Gegeben seien nun die drei Einschrittverfahren für das Anfangswertproblem $y' = f(x,y)$:

i) expliziter Euler: $u_1 = u_0 + hf(x_0, u_0)$

ii) expliziter Euler mit halber Schrittweite:

$$v_{1/2} = v_0 + h/2 \cdot f(x_0, v_0), \qquad v_1 = v_{1/2} + h/2 \cdot f(x_0 + h/2, v_{1/2})$$

iii) modifiziertes Euler-Verfahren nach Collatz: $w_1 = w_0 + hf(x_0 + h/2, w_0 + h/2 \cdot f(x_0, w_0))$.

a) Man bestimme die Konsistenzordnung p der Verfahren (i) und (ii). Welche Beziehung gilt zwischen dem jeweils führenden Term des Diskretisierungsfehlers $\tau(h)$ von (i) und (ii)?

b) Man zeige: $w_1 = 2v_1 - u_1$ für $u_0 = v_0 = w_0 = y_0$. Was folgt daraus für die Konsistenzordnung des modifizierten Euler-Verfahrens (iii)?

c) Wie lassen sich die Verfahren (i), (ii) und (iii) geometrisch veranschaulichen?