PROF. DR. BERND SIMEON
CHRISTIAN GOBERT
THOMAS MÄRZ

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Numerik

SS 2009

Übungsblatt 6

Aufgabe 1: *(Singulärwertzerlegung)*

Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ beliebig. Dann gibt es unitäre Matrizen $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ und $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ so, dass

$$A = U\Sigma V^H \quad \text{mit} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}\,, \quad \hat{\Sigma} = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_p)\,.$$

Dabei gilt $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_p > 0$.

a) Die Null-blöcke in Σ können auch wegfallen. Unter welchen Konstellationen von n, m und $\operatorname{rang}(A)$ verschwinden welche dieser Null-blöcke? Was bedeutet der Index p ?

b) Partitionieren Sie $U = [U_1|U_2]$ und $V = [V_1|V_2]$ geeignet, um die sogenannte reduzierte Singulärwertzerlegung
$$A = U_1\hat{\Sigma}V_1^H$$
zu erhalten. Was haben die Informationen U_1, U_2, V_1, V_2 mit $\operatorname{kern}(A)$, $\operatorname{kern}(A^H)$, $\operatorname{bild}(A)$ und $\operatorname{bild}(A^H)$ zu tun ?

c) Benutzen Sie die Resultate aus b), um die Beziehungen
$$\operatorname{kern}(A) \perp \operatorname{bild}(A^H) \quad , \quad \operatorname{kern}(A^H) \perp \operatorname{bild}(A)$$
zu zeigen.

d) Zeigen Sie: Falls $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal ist, dann gelten
$$\operatorname{kern}(A) = \operatorname{kern}(A^H) \quad , \quad \operatorname{bild}(A) = \operatorname{bild}(A^H)\,.$$
Hinweis: Was haben die Matrizen der Diagonalisierung $A = QDQ^H$ mit denen der Singulärwertzerlegung zu tun ? Welche Beziehung besteht in diesem Spezialfall zwischen Eigenwert und Singulärwert ?

e) Die 2-Norm für Matrizen:

   i) Falls $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch ist, so sind die Eigenwerte bekanntlich reell. Zeigen Sie für hermitsches A:
   $$\lambda_{\min} \leq \frac{x^H A x}{x^H x} \leq \lambda_{\max}\,,$$
   d.h. der Rayleigh-Quotient liegt zwischen minimalem und maximalem Eigenwert. Begründen Sie außerdem, dass die Grenzen angenommen werden.

   ii) Die 2-Norm für Matrizen $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ist mit Hilfe der 2-Norm für Vektoren definiert als
   $$\|A\|_2 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}\,.$$
   Benutzen Sie (a), um zu begründen, dass $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^H A)}$ gilt.

iii) Benutzen Sie (b) und die Singulärwertzerlegung von $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, um zu begründen, dass

$$\sigma_1 = \|A\|_2$$

gilt, also der maximale Singulärwert genau die Norm ist.

iv) Sei jetzt $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertierbar. Begründen Sie, dass $\sigma_n \neq 0$ ist und außerdem

$$\frac{1}{\sigma_n} = \|A^{-1}\|_2$$

gilt. Wie berechnen Sie die Kondition $\kappa_2(A)$ bzgl. $\|.\|_2$?

f) Die Singulärwertzerlegung kann stabil berechnet werden, siehe z.B. das Buch "Matrix Computations" von G.H. Golub und C.F. van Loan. Zur Zusammenfassung: Warum ist das so toll ?

Aufgabe 2: *Robertson-Beispiel*

Die chemische Reaktion dreier Substanzen A, B, C sei durch die folgenden Gesetze beschrieben:

$$A \overset{k_1}{\to} B, \tag{1}$$

$$B + B \overset{k_2}{\to} B + C, \tag{2}$$

$$B + C \overset{k_3}{\to} A + C \tag{3}$$

mit Reaktionsgeschwindigkeiten $k_1 = 0.04, k_2 = 3 \cdot 10^7, k_3 = 10^4$. Man stelle das zugehörige Differentialgleichungssystem für die Konzentrationen $y_1 = [A], y_2 = [B], y_3 = [C]$ auf.