PROF. DR. BERND SIMEON
CHRISTIAN GOBERT
THOMAS MÄRZ

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

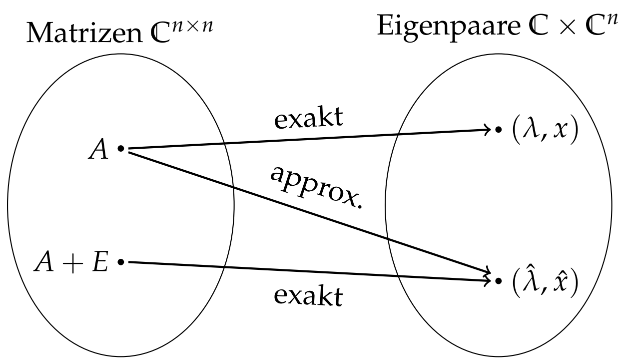
Numerik

SS 2009

Übungsblatt 5

Aufgabe 1: *(Rückwertsfehler von Eigenpaaren)*

Die Berechnung eines Rechtseigenpaares $(\lambda, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ für die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist eine Abbildung $A \to (\lambda, x)$. Sei nun $(\hat{\lambda}, \hat{x}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ ein approximatives Rechtseigenpaar, z.B. durch Vektoriteration ermittelt. Im Rückwärtsfehlerkonzept wird der Fehler, der in $(\hat{\lambda}, \hat{x})$ steckt, zurückgespielt zu einem Eingabefehler E in der Eingabe A und zwar so , dass $(\hat{\lambda}, \hat{x})$ ein exaktes Rechtseigenpaar von $A + E$ ist (siehe Skizze).



Damit sind die Rückwärtsfehlermatrizen E durch

$$(A + E)\hat{x} = \hat{\lambda}\ \hat{x}$$

charakterisiert.

a) Bestimmen Sie ein solches E. Versuchen Sie es mit einer Rang 1 Matrix. Benutzen Sie dazu das Residuum r
$$r := \hat{\lambda}\ \hat{x} - A\hat{x}.$$
Sie können ohne Einschränkung davon ausgehen, dass $\|\hat{x}\|_2 = 1$ gilt.

b) Berechnen Sie $\|E\|_2$ für die Matrix E aus Teil a).

c) Benutzen Sie die so gewonnene Abschätzung des Rückwärtsfehlers, um ein Abbruchkriterium für die Vektoriteration (und seine Verwandten) zu entwerfen.

d) Formulieren Sie den Algorithmus für die Vektoriteration mit dem Abbruchkriterium aus Teil c).

Aufgabe 2: *(QR-Iteration)*

Die QR-Iteration zur Eigenwertbestimmung ist für *allgemeine* Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sehr teuer. Dieser Nachteil lässt sich dadurch beheben, dass A zunächst mittels einer Ähnlichkeitstransformation auf spezielle Gestalt gebracht wird. Sei dafür $A^{(0)} = A$ und für $k = 0, ..., n-3$

$$A^{(k+1)} = (Q^{(k)})^T A^{(k)} Q^{(k)},$$

wobei $Q^{(k)}$ die Householder-Reflexion zur Eliminierung der Einträge $A^{(k)}_{(k+2):n,(k+1)}$ bezeichne. Zeigen Sie:

a) $A^{(k)}$ ist ähnlich zu A,

b) $A^{(n-2)}$ ist eine obere Hessenberg-Matrix.

c) Welche Gestalt besitzt $A^{(n-2)}$, wenn A symmetrisch ist?

Auf $A_0 = A^{(n-2)}$ werde nun die QR-Iteration folgendermaßen angewandt: Für $i \geq 0$ wird mittels geeigneter *Givensrotationen* eine $Q_i R_i$-Zerlegung von A_i und anschließend $A_{i+1} = R_i Q_i$ berechnet.

d) Zeigen Sie, dass A_i für $i \geq 0$ die gleiche Struktur wie $A^{(n-2)}$ in b) bzw. c) besitzt.

e) Bestimmen Sie den Aufwand zur Berechnung von A_{i+1} aus A_i für den allgemeinen und den symmetrischen Fall. Es genügt jeweils die Form $\mathcal{O}(n^s)$ mit einem geeigneten s.