PROF. DR. BERND SIMEON
CHRISTIAN GOBERT
THOMAS MÄRZ

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

Numerik

SS 2009

Übungsblatt 4

Aufgabe 1: *(Rücktransformation von Eigenvektoren)*

Die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wurde durch $n-2$ Householder-Transformationen in Tridiagonalgestalt C überführt, d.h.

$$\begin{aligned} C &= H_{n-2}\cdot\ldots\cdot H_1 A H_1 \cdot \ldots \cdot H_{n-2} \\ H_i &:= I - \chi_i u_i u_i^T, \quad \chi_i = \frac{2}{u_i^T u_i} \neq 0, \\ u_i &= (0,\ldots,0,u_{i+1,i},\ldots,u_{ni})^T, \quad i = 1,\ldots,n-2. \end{aligned}$$

z sei ein Eigenvektor der Tridiagonalmatrix C zum Eigenwert λ_k.

Man formuliere einen *effizienten* Algorithmus, der zu gegebenen Größen z, χ_i, u_i für $i = 1,\ldots,n-2$ den Eigenvektor y von A zum Eigenwert λ_k berechnet.

Aufgabe 2: *(Eigenwertabschätzungen)*

Es sei A eine diagonalisierbare $n\times n$-Matrix, d.h. es existiert eine reguläre Matrix T mit

$$T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\lambda_i) =: D\,,$$

wobei λ_i die (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerte von A sind. F sei eine $n\times n$-Matrix, die die Störungen der Matrix A beschreibt.

a) Zeigen Sie: Ist λ ein Eigenwert der gestörten Matrix $(A+F)$, so gilt die Abschätzung

$$\min_i |\lambda - \lambda_i| \leq \kappa_2(T)\|F\|_2,$$

wobei $\kappa_2(T)$ die Konditionszahl obiger Transformationsmatrix T in der $\|\cdot\|_2$-Norm ist.

b) Wie vereinfacht bzw. verändert sich die Abschätzung in a), falls A hermitesch ist?