PROF. DR. BERND SIMEON
CHRISTIAN GOBERT
THOMAS MÄRZ

Numerik

SS 2009

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 *Clenshaw-Curtis-Quadratur*
Wie bereits bei der Polynominterpolation bietet es sich auch zur Quadratur an, Tschebysheff-Knoten als Stützstellen zu verwenden. Mit der Substitution $x = \cos(\theta)$ erhält man

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{\pi} f(\cos(\theta))\sin(\theta)d\theta \,.$$

Das neue Integral behandelt man mit Stützstellen $\theta_j = 2\pi \cdot j/N$, $j = 0, \ldots, n$, $N = 2n$. Somit sind die korrespondierenden $x_j = \cos(\theta_j)$, $j = 0, \ldots, n$ die $n+1$ Tschebysheff-Knoten im Intervall $[-1, 1]$.

a) Nehmen Sie an zu $F(\theta) := f(\cos(\theta))$ sei die Kosinus-Transformation bekannt

$$F(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\theta) \,.$$

Wie berechnet sich der Wert $I(f)$ in Abhängigkeit von den A_k ?
Hinweis: $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.

b)
1. Welche Eigenschaft muss eine 2π-periodische Funktion G haben, damit ihre Fourierreihe nur Kosinus-Glieder enthält ?
2. Die Funktion F aus Teil a) ist auf $[0, \pi]$ erklärt. Setzen Sie F geignet auf $[-\pi, 0]$ fort.
3. Die n-te Fourier-Partialsumme einer 2π-periodischen Funktion G ist gegeben durch

$$S_n(G)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \,.$$

   Welche Beziehung besteht zwischen a_k, b_k und c_k, c_{-k} ?
4. Die c_k werden mittels diskreter Fourier-Transformation berechnet:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} G(\theta_j) e^{-i \cdot k \cdot \theta_j} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} G(\theta_j) e^{-i \cdot 2\pi \cdot j \cdot k/N} \,.$$

   Zeigen Sie: $c_{-k} = c_{N-k}$
5. Wie bekommt man mit Hilfe der diskreten Fourier-Transformation der Funktion $F(\theta)$ aus Punkt 2 die Koeffizienten A_k der diskreten Kosinus-Transformation?

c) Formulieren Sie aus a) und b) eine Quadratur-Formel (Clenshaw-Curtis-Algorithmus).

Aufgabe 2 *Rund um Quadratur*

a) Beantworten Sie folgende Fragen zur Quadratur:

- Welche Quadraturverfahren kennen Sie?
- Welche Ideen/Prinzipien stecken dahinter?
- Warum sollten Newton-Cotes-Formeln eher nicht angewandt werden?
- Was zeichnet die Gauß-Quadratur aus?
- Wie ist das Konstruktionsprinzip der Gauß-Quadratur?
- Was besagt der Peano-Kern-Satz?
- Was bedeutet Adaptivität?
- Was macht folgender Code?

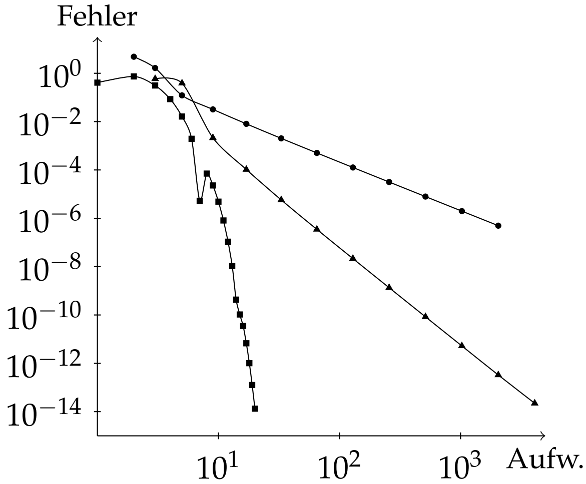
```
function I=tuwas(f,a,b,tol)
y=feval(f,[a (a+b)/2 b]);
if (b-a)*abs(y(1)/4-y(2)/2+y(3)/4)<3*tol
   I=(b-a)*(y(1)+2*y(2)+y(3))/4;
else
   I=tuwas(f,a,(a+b)/2,tol)+tuwas(f,(a+b)/2,b,tol);
end;
```

b) Beurteilen Sie folgende Aussagen und begründen Sie Ihre Ja/Nein-Antworten:

1. Die Newton-Cotes-Formeln sind besonders effektiv, denn man benötigt nur wenige Funktionsauswertungen für die Integration von Polynomen hohen Grades.
2. Gauß-Legendre-Quadratur-Formeln besitzen immer positive Gewichte.
3. Zur Gauß-Legendre-Quadratur mit 10 Stützstellen existiert eine Fehlerschätzung, die nur die 3. Ableitung des Integranden benötigt.
4. Jede konsistente Quadraturformel integriert lineare Funktionen exakt.
5. Sei S eine summatorische Quadraturformel, die als Basisverfahren eine Gauß-Legendre Quadraturformel verwendet, dann ist die Abbildung $f \to S(f)$ linear.

c) Aufwand-Genauigkeits-Diagramme:
Zur Berechnung des Integrals $\int_0^5 \sin(x)e^{\sin x}dx$ wurden verwendet:

1. die summatorische Simpsonregel zu verschiedenen Schrittweiten h,
2. die Gauß-Legendre Quadratur (auf $[0,5]$ transformiert) zu verschiedener Anzahl von Stützstellen,
3. die summatorische Trapezregel zu verschiedenen Schrittweiten h.



Welcher Graph im nebenstehenden Aufwands-Genauigkeits-Diagramm gehört zu welcher Quadraturformel? Begründen Sie Ihre Antwort.