3.1. Übung. Einführung in die Programmierung (MA 8003)

Aufgabe 3.1.1:

a) Verwenden Sie den `plot`-Befehl, um die Funktionen

$$f_a(x) := ax^3 + 4x^2 - x + 1$$

für die Parameter $a = 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2$ im Intervall $[-4, 1]$ in verschiedenen Farben in ein Diagramm zu plotten.

b) Berechnen Sie das lokale Maximum der einzelnen Funktionen und markieren Sie es zusätzlich mit einem kleinem Kreis.

Aufgabe 3.1.2: In dieser Aufgabe soll die Zahl π mit Hilfe eines Monte-Carlo-Algorithmus berechnet werden. Dazu stellt man sich den Einheitskreis als Zielscheibe vor und wirft $n \in \mathbb{N}$ zufällige Würfe in das Intervall $(-1, 1) \times (-1, 1)$. Davon landen n_{in} Würfe innerhalb des Kreises. Die Kreiszahl π lässt sich nun folgendermaßen annähern:

$$\pi \approx p(n) := \frac{n_{in}}{n} \cdot 4$$

Verwenden Sie verschiedene Werte für n und stellen Sie die Würfe grafisch dar. Verwenden Sie unterschiedliche Farben für Würfe, die in und außerhalb der Kreisscheibe landen.

Erstellen Sie ferner ein Diagramm, welches den Fehler $|p(n) - \pi|$ in Abhängigkeit von der Wurfanzahl n geeignet darstellt.

Aufgabe 3.1.3: Gegeben seien die Kurven $\omega_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\omega_a(t) := \begin{pmatrix} t^2 \cos(t)/10^5 \\ t^2 \sin(t)/10^5 \\ \sin(at) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 400\pi].$$

a) Machen Sie einen 3-D Plot der Kurve für $a = 0.01$ und $a = 0.03$.

b) Plotten Sie die Kurve für die Parameter $a = 0.01$, $a = 0.02$, $a = 0.1$ und $a = 1/7$ mit `subplot` in ein Fenster.

Aufgabe 3.1.4 (*): Eine Hypozykloide wird von einem Punkt eines Kreises beschrieben, der innen auf einem größeren Kreis abrollt. Plotten Sie die durch

$$x(t) = (a-b)\cos(t) + b\cos\left(\frac{(a-b)}{b} \cdot t\right)$$

$$y(t) = (a-b)\sin(t) + b\sin\left(\frac{(a-b)}{b} \cdot t\right)$$

parametrisierte Hypozykloide nacheinander für die Parameterwerte $b = 1$ und $a = 2.1, 3, 4, \frac{9}{2}, \frac{14}{3}, 2\pi$ für $t \in [0, t_{\max}]$. Wählen Sie $t_{\max}$ geeignet.

Hinweis: Ihr Funktionskopf sollte in etwa folgende Form haben:
`function plothypozykloide(a, b, n, tmax)`,
wobei `a` und `b` die Radien der beiden Kreise sind und `n` die Anzahl der Funktionsauswertungen.

Aufgabe 3.1.5 (*): Das Newtonverfahren zur Nullstellensuche einer Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben über die folgende Iterationsvorschrift: Setze $x^1 =$`x` und $k = 1$. Wiederhole

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$

solange, bis $|f(x^k)| \leq 10^{-8}$ (einstellbare Toleranz) oder $k > 100$ (max. Iterationen) ist.

a) Implementieren Sie das Newtonverfahren in einer Funktion `function X = newton(f, df, x)`. Die Rückgabe `X` soll ein Vektor sein, in dem alle Iterierten x^k gespeichert sind. `f` ist ein Handle auf die Funktion f, `df` auf dessen Ableitung f'.

b) Testen Sie Ihr Verfahren an der Funktion $f(x) := x^4 - 2x$ mit dem Startpunkt `x = 4`. Das Verfahren sollte ca. 9 Schritte brauchen.

c) Der Verlauf der Iterationen soll nun illustriert werden. Schreiben Sie dazu eine neue Funktion `plotiterates(f, X)`, die als Eingabe das Handle auf die Abbildung f und die Iterierten `X` aus `newton` übergeben bekommt. In `plotiterates` soll folgendes implementiert werden:

   i) Lassen Sie zuerst f im Intervall $[\min(X), \max(X)]$ plotten.

   ii) Plotten Sie nun in dasselbe Fenster einen Polygonzug in einer anderen Farbe, der die Punkte
   $$(X(1), 0), (X(1), f(X(1))), \ldots, (X(n), 0), (X(n), f(X(n)))$$
   verbindet, wobei n die Länge des Vektors `X` ist.

d) Testen Sie Ihre Funktion an dem Beispiel aus b) und an der Funktion $f(x) := x/\sqrt{1+x^2}$ mit Startwert $x^1 = 0.9$. Sehen Sie, wie das Newtonverfahren arbeitet?